４元数関数論

稲本 直太

ドラフト 2017 年 5 月 20 日版

概 要

目 次

1　はじめに

2　４元数斜体

2.1　定義

$G \equiv \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ を以下を満たす有限群とする。

	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
1	1	i	j	k	-1	-i	-j	-k
i	i	-1	k	-j	-i	1	-k	j
j	j	-k	-1	i	-j	k	1	-i
k	k	j	-i	-1	-k	-j	i	1
-1	-1	-i	-j	-k	1	i	j	k
-i	-i	1	-k	j	i	-1	k	-j
-j	-j	k	1	-i	j	-k	-1	i
-k	-k	-j	i	1	k	j	-i	-1

$$M \equiv \{x | x = x_R + x_I i + x_J j + x_K k, x_R \in R, x_I \in R, x_J \in R, x_K \in R\} \tag{2.1.1}$$

は、

$$x = x_R + x_I i + x_J j + x_K k, y = y_R + y_I i + y_J j + y_K k \tag{2.1.2}$$

と置いて、加法を次の様に定義し、

$$x + y \equiv (x_R + y_R) + (x_I + y_I)i + (x_J + y_J)j + (x_K + y_K)k \tag{2.1.3}$$

乗法を次の様に定義すると、

$$\begin{aligned} x * y \equiv &(x_R y_R - x_I y_I - x_J y_J - x_k y_K) \\ &+ (x_R y_I + x_I y_R + x_J y_K - x_k y_J)i \\ &+ (x_R y_J + x_J y_R + x_K y_I - x_I y_K)j \\ &+ (x_R y_K + x_K y_R + x_I y_J - x_J y_I)k \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

以下が成立する。

・加法が閉じている。

$$\forall x, y \in M, x + y \in M \tag{2.1.5}$$

・加法の結合律が成り立つ。

$$\forall x, y, z \in M, (x + y) + z = x + (y + z) \tag{2.1.6}$$

・加法の単位元が存在する。

$$\forall x \in M, \exists 0 \in M, x + 0 = 0 + x = x \tag{2.1.7}$$

・加法の逆元が存在する。

$$\forall x \in M, \exists y \in M, x + y = y + x = 0 \tag{2.1.8}$$

・加法の可換律が成り立つ。

$$\forall x, y \in M, x + y = y + x \tag{2.1.9}$$

・乗法が閉じている。

$$\forall x, y \in M, x * y \in M \tag{2.1.10}$$

・乗法の結合律が成り立つ。

$$\forall x, y, z \in M, (x * y) * z = x * (y * z) \tag{2.1.11}$$

・乗法の単位元が存在する。

$$\forall x \in M, \exists 1 \in M, x * 1 = 1 * x = x \tag{2.1.12}$$

・乗法の逆元が存在する。

$$\forall x \in M - \{0\}, \exists y \in M, x * y = y * x = 1 \tag{2.1.13}$$

・乗法の可逆元の集合である。

$$\{x | \exists y \in M, x * y = y * x = 1\} = M - \{0\} \tag{2.1.14}$$

・加法の可換律が成り立たない。(乗法に関して可換群 (アーベル群) でない。)

$$\exists x, y \in M, x * y \neq y * x \tag{2.1.15}$$

M は斜体を成す。この斜体を「4 元数斜体」と呼ぶことにし、M で表す。

2.2　ノルム

M の要素 x が、$x = x_R + x_I i + x_J j + x_K k$ と表されるとき、

$$|x| \equiv \sqrt{{x_R}^2 + {x_I}^2 + +{x_J}^2 + {x_K}^2} \tag{2.2.1}$$

と定義すると、以下が成立する。

・長さは 0 以上である。

$$|x| \geq 0 \tag{2.2.2}$$

・長さが 0 であることと加法の単位元 0 であることは同値である。

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{2.2.3}$$

・積の長さは、長さの積に等しい。

$$|x * y| = |x||y| \tag{2.2.4}$$

・和の長さは、長さの和以上である。

$$|x + y| \geq |x| + |y| \tag{2.2.5}$$

$|x|$ を 4 元数斜体の要素 x のノルムと呼ぶことにする。

2.3　加法の逆元

$x = x_R + x_I i + x_J j + x_K k$ の加法の逆元は、
$-x = -x_R - x_I i - x_J j - x_K k$ で表される。

2.4　乗法の逆元

$x = x_R + x_I i + x_J j + x_K k$ の乗法の逆元は、
$x^{-1} = \frac{x_R}{|x|^2} - \frac{x_I}{|x|^2} i - \frac{x_J}{|x|^2} j - \frac{x_K}{|x|^2} k$ で表される。

2.5　交換子積

$$[x, y] \equiv x * y - y * x \tag{2.5.1}$$

と定義し、これを 4 元数斜体の 2 つの要素の交換子積と呼ぶことにする。

$$[x, y] = 2(x_j y_K - x_K y_I)i + 2(x_K y_I - x_I y_J)j + 2(x_I y_J - x_J y_K)k \tag{2.5.2}$$

が成立する。

3　4 元数斜体上の関数の微分

3.1　微分の定義

$x = x_R + x_I i + x_J j + x_K k$、$f(x) = f_R(x) + f_I(x)i + f_J(x)j + f_K(x)k$ とするとき、関数 $f(x)$ の x による微分を次式で定義する。

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{h\to 0}\{f(x+h) - f(x)\}\frac{1}{h} \tag{3.1.1}$$

一般に、この微分値は h をどの方向から 0 に近づけるかによって値が異なり、導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ は連続にならない。

3.2　4 元数コーシー・リーマンの関係式

導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ が連続となる条件を求めてみる。h を実数とする。

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &\equiv \lim_{h\to 0}\{f(x_R+h, x_I, x_J, x_K) - f(x_R, x_I, x_J, x_K)\}\frac{1}{h} \\ &= \frac{\partial f_R}{\partial x_R} + \frac{\partial f_I}{\partial x_R}i + \frac{\partial f_J}{\partial x_R}j + \frac{\partial f_K}{\partial x_R}k\end{aligned} \tag{3.2.1a}$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &\equiv \lim_{h\to 0}\{f(x_R, x_I+h, x_J, x_K) - f(x_R, x_I, x_J, x_K)\}\frac{1}{hi} \\ &= -\frac{\partial f_R}{\partial x_I} + \frac{\partial f_I}{\partial x_I}i + \frac{\partial f_J}{\partial x_I}j - \frac{\partial f_K}{\partial x_I}k\end{aligned} \tag{3.2.1b}$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &\equiv \lim_{h\to 0}\{f(x_R, x_I, x_J+h, x_K) - f(x_R, x_I, x_J, x_K)\}\frac{1}{hj} \\ &= -\frac{\partial f_R}{\partial x_J} - \frac{\partial f_I}{\partial x_J}i + \frac{\partial f_J}{\partial x_J}j + \frac{\partial f_K}{\partial x_J}k\end{aligned} \tag{3.2.1c}$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &\equiv \lim_{h\to 0}\{f(x_R, x_I, x_J, x_K+h) - f(x_R, x_I, x_J, x_K)\}\frac{1}{hk} \\ &= -\frac{\partial f_R}{\partial x_K} + \frac{\partial f_I}{\partial x_K}i - \frac{\partial f_J}{\partial x_K}j + \frac{\partial f_K}{\partial x_K}k\end{aligned} \tag{3.2.1d}$$

導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ が連続である為の必要十分条件は、次の関係式を満たすことと分る。

$$\frac{\partial f_R}{\partial x_R} = \frac{\partial f_I}{\partial x_I} = \frac{\partial f_J}{\partial x_J} = \frac{\partial f_K}{\partial x_K} \tag{3.2.2a}$$

$$\frac{\partial f_I}{\partial x_R} = -\frac{\partial f_R}{\partial x_I} = \frac{\partial f_K}{\partial x_J} = -\frac{\partial f_J}{\partial x_K} \tag{3.2.2b}$$

$$\frac{\partial f_J}{\partial x_R} = -\frac{\partial f_K}{\partial x_I} = -\frac{\partial f_R}{\partial x_J} = \frac{\partial f_I}{\partial x_K} \tag{3.2.2c}$$

$$\frac{\partial f_K}{\partial x_R} = \frac{\partial f_J}{\partial x_I} = -\frac{\partial f_I}{\partial x_J} = -\frac{\partial f_R}{\partial x_K} \tag{3.2.2d}$$

これらの式を、4 元数コーシー・リーマンの関係式、または、正則条件と呼ぶことにする。4 元数斜体上の関数が、ある定義域で正則条件を満たすとき、その関数はその領域で正則であると呼ぶことにする。4 元数斜体上の全ての領域で特異点を除いて正則な関数を正則関数と呼ぶことにする。

3.3 正則関数の和は正則関数か？

3.4 正則関数の積は正則関数か？

3.5 正則関数の合成関数は正則関数か？

3.6 正則関数の逆関数は正則関数か？

3.7 正則関数の例

3.7.1 x のべき乗

3.7.2 指数関数、三角関数

3.7.3 対数関数、逆三角関数

3.8 偏微分の交換

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = ??? \tag{3.8.1}$$

4 4 元数関数の積分

4.1 閉じた 3 次元超平面上の定積分

$$\oint_S f(x) dS \equiv \int_{C_1} \int_{C_2} \int_{C_3} f(x) dx_1 dx_2 dx_3 \tag{4.1.1}$$

4.2 4 元数コーシーの積分定理

f(x) が正則関数で、閉じた 3 次元超平面 S の内部に特異点を持たない場合、以下の積分定理が成り立つ ???

$$\oint_S f(x) dS = 0 \tag{4.2.1}$$

4.3　4 元数コーシーの積分表示

f(x) が正則関数で、閉じた 3 次元超平面 S の内部に特異点を持たない場合、以下の積分定理が成り立つ。

$$\oint_S \frac{f(x)}{(x-a)^n} dS = ??? \tag{4.3.1}$$

5　4 元数留数定理

6　4 元数リーマン超平面

7　終わりに

謝辞

付録