

# 複素多様体論

辻 元

## 目次

<b>1</b>	<b>予備知識</b>	<b>4</b>
1.1	はじめに	4
1.2	全微分	5
1.3	微分写像	5
1.4	逆関数定理、陰関数定理	6
1.5	多様体とは何か	8
1.6	位相多様体	9
1.7	可微分多様体	10
1.8	接空間	11
1.9	外積代数	12
1.10	対称テンソルと交代テンソル	13
1.11	外積代数	14
1.12	多様体上の微分形式	14
<b>2</b>	<b>多変数関数論からの準備</b>	<b>15</b>
2.1	多変数正則関数	15
2.2	正則写像に関する逆関数定理、陰関数定理	16
2.3	ワイエルストラスの予備定理	17
2.4	有理型関数	18
2.5	多重劣調和関数	19
<b>3</b>	<b>複素多様体</b>	<b>22</b>
3.1	複素多様体	22
3.2	複素多様体間の正則写像	24
3.3	正則接空間、正則余接空間	24
3.4	複素多様体上の微分形式	26
3.5	カレント	27

<b>4</b>	<b>層とコホモロジー</b>	<b>29</b>
4.1	層の定義	29
4.2	層の準同型、層の完全系列	31
4.3	層の引き戻し、順像	32
4.4	解析的接続層	33
4.5	コホモロジー	35
4.6	コホモロジー完全系列	37
<b>5</b>	<b>解析空間</b>	<b>38</b>
5.1	解析的集合	38
5.2	解析空間	39
5.3	高次順像、Grauert の定理	40
<b>6</b>	<b>ドルボー複体と層係数コホモロジー</b>	<b>41</b>
6.1	細層	41
6.2	正則ベクトル束	42
6.3	局所自由層、因子と可逆層	44
6.4	複素多様体上の微分形式	47
6.5	ドルボーの補題	47
6.6	ドルボー同型	49
<b>7</b>	<b>ドラームコホモロジーと交叉理論</b>	<b>50</b>
7.1	ドラームコホモロジー	50
7.2	ポアンカレの補題	51
7.3	ドラームの定理	52
7.4	コホモロジーの積構造	53
7.5	カレントのドラームコホモロジー	53
7.6	交叉理論	53
<b>8</b>	<b>リーマンロッホの定理</b>	<b>53</b>
8.1	オイラー標数	53
8.2	1次元コンパクト複素多様体上のリーマンロッホの定理	55
8.3	線形系と有理写像	56
8.4	エルミート接続、曲率	57
8.5	ベクトル束の正值性	60
8.6	チャーン類	60
8.7	一般次元代数多様体のリーマンロッホの定理	62
<b>9</b>	<b>調和積分論</b>	<b>63</b>
9.1	有限次元モデル	63
9.2	エルミート計量	65

9.3	ホッジ*作用素 . . . . .	65
9.4	ケーラー多様体 . . . . .	67
9.5	調和積分論 . . . . .	68
9.6	Hodge 分解 . . . . .	69
<b>10</b>	<b><math>L^2</math>-評価式とネーデルの消滅定理</b>	<b>70</b>
10.1	ケーラー等式 . . . . .	70
10.2	Bochner-小平-中野の公式 . . . . .	70
10.3	弱 1 完備多様体上の $L^2$ -評価 . . . . .	72
10.4	Nadel's vanishing theorem . . . . .	74
<b>11</b>	<b>セールの双対定理</b>	<b>76</b>
<b>12</b>	<b>代数曲線、コンパクトリーマン面</b>	<b>77</b>
<b>13</b>	<b>Compact Riemann surfaces and Projective curves</b>	<b>78</b>
<b>14</b>	<b>Kähler metric on compact complex curves</b>	<b>78</b>
<b>15</b>	<b>ベルグマン核</b>	<b>80</b>
15.1	古典的ベルグマン核 . . . . .	80
15.2	随伴直線束とベルグマン計量 . . . . .	82
<b>16</b>	<b>複素多様体の変形</b>	<b>82</b>
<b>17</b>	<b>倉西族</b>	<b>85</b>
<b>18</b>	<b>モジュライ空間</b>	<b>91</b>
<b>19</b>	<b>Weil-Petersson 計量</b>	<b>92</b>
<b>20</b>	<b>Berndtsson の定理</b>	<b>94</b>
20.1	Griffith の公式 . . . . .	95
20.2	Berndtsson の定理の証明 . . . . .	96
20.3	Weil-Petersson 計量の曲率 . . . . .	97
20.4	負曲率と双曲性 . . . . .	98
20.5	調和写像とシャファレヴィッチの予想 . . . . .	102
<b>21</b>	<b>余接束の Zariski 分解</b>	<b>102</b>

# 1 予備知識

## 1.1 はじめに

複素多様体論は、難しいと言われる。実際、複素多様体論は実に広範な知識を必要とする。可微分多様体論、多変数関数論、微分幾何学、偏微分方程式論、関数解析学、代数幾何学など全てを勉強しようとするのが遠くになりそうに思う人も多いであろう。

しかしながら、実は大半の部分は初等的であり、それ程広範な知識は必要としない。基本的には複素多様体から得られる、有限次元ベクトル空間に、複素多様体の性質を投影させることで大半の定理が得られているのである。

つまり、コホモロジー群という多くの学生にとって苦手な対象さえ、自由に使いこなせれば、大半の理論は理解可能である。

邪魔なコホモロジーを消したりするには、 $\bar{\partial}$  方程式を解くことになるが、これも、線形代数における連立方程式を無限次元に素直に一般化したものに過ぎない。例えばラプラス作用素が自己随伴であるということは、行列がエルミートであることと同じで、無限次元という鎧を着けているために立派な理論に見えているだけである。

近年の複素解析幾何学の発展により、複素多様体論の性質は、多重劣調和関数の理論や正則領域の理論に見られる凸性に多くの事柄が帰着することを指し示しているように見える。

「全ての道はローマに通ず」ではなく、全ての道は擬凸性に通じるのである。実際、多変数関数論の研究は擬凸性の研究から始まったのであって、岡潔のレビ問題の解決 (1954) などを見ても、表立ってコホモロジーの概念を使わずに議論がなされて来た。

この頃は、積分公式により実質的に  $\bar{\partial}$  方程式を解いていたので、関数解析的な手法も使われていなかった。

それと同じ頃、調和積分論を複素多様体上に一般化する試みが小平邦彦により進められ、調和積分論の整備が始められた。特に、小平の消滅定理が証明され、代数多様体の特徴付けがなされたのは画期的な事件であった。

その後、これら2つの手法は、岡潔の発見した層の理論を通じて1つの物になり、やがて Grothendiek によるスキーム論による代数幾何学の基礎付けが行なわれ、特に特異点を持つ代数多様体やさらには有限体上の代数多様体の研究などが強力に推し進められた。

また、モジュライの理論も、Mumford、Griffith などにより幾何学的不変式論や、周期積分の観点から盛んに研究された。

しかしながら、その一方でヘルマンダーにより、小平理論の関数解析的な、非コンパクト多様体への拡張が行なわれ、著しい応用が見付けられた。つまり、Grothendiek 流の抽象論とは別の、謂わば量的な方法の進歩により、理論はより深化して行った。

これらの古典的な歴史を見て思うのは、物事を1つの側面からだけ見ていたのでは駄目だということである。物事にはいろいろな側面があり、それらを総合しないと全体像は把握できない。特に代数多様体の世界のように複雑な世界を探求するにはなお更である。

というような訳で、盛り沢山の内容を如何に分かり易く読者に伝えるか、著者なりに気を使った。是非通読して、複素幾何学の基礎を固めて欲しい。

## 1.2 全微分

$n$  個の実数の組の全体を  $\mathbb{R}^n$  で表す。 $\mathbb{R}^n$  の点を  $p = (p_1, \dots, p_n)$  のように表す。 $1 \leq i \leq n$  に対して

$$x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

を  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$x_i(p) := p_i$$

で表す。 $x_i (1 \leq i \leq n)$  は  $\mathbb{R}^n$  上の連続関数である。 $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合、 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  を連続関数とする。 $f$  が  $p \in U$  で全微分可能であるとは

$$f(p+q) = f(p) + \sum_{i=1}^n A_i q_i + O(|q|)$$

となる  $A_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)$  が存在することをいう。全微分可能であるというのは、 $p$  の近傍で (2次の無限小を法として) 1次写像で近似できるということである。すなわち、 $p$  の近くを拡大してみると  $f$  の振る舞いは1次写像

$$f(p) + \sum_{i=1}^n A_i q_i$$

のように見える訳である。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{q_i \rightarrow 0} \frac{1}{q_i} (f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + q_i, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p))$$

であるから

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

が成り立つ。偏微分可能であることと全微分可能であることは異なることに注意しよう。

## 1.3 微分写像

$U$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

を連続写像とする。 $\varphi$  は  $\mathbb{R}^m$  の標準座標を用いて  $\varphi = {}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  と  $m$  個の  $U$  上の関数の組として表すことができる。 $\varphi$  が  $C^r$ -級であるとは、各  $\varphi_i (1 \leq i \leq m)$  が  $C^r$ -級であることをいう。 $\varphi$  が  $C^1$ -級であれば

$$J\varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

をヤコビ行列 (Jacobian matrix) と呼ぶ。 $\det J\varphi$  をヤコビ行列式 (Jacobian determinant) と呼ぶ。

ヤコビ行列は、 $\varphi$  を一点において線形近似したものに他ならない。このように微分とは線形近似のことである。

#### 1.4 逆関数定理、陰関数定理

**定理 1.1** (逆関数定理)  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域とする。 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $C^r$ -写像とする。 $p_0 \in U$  で  $(\det J\varphi)(p_0) \neq 0$  ならば、 $p_0$  の近傍  $U$  と  $\varphi(p_0)$  の近傍  $V$  が存在して、 $\varphi|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $U$  から  $V$  への  $C^r$ -同相写像を与える。

逆写像定理の言っていることは、線形近似が逆を持つなら、写像自体が局所的に可微分な逆をもつということである。

**定理 1.2** (陰関数定理)  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域とする。 $m < n$  とし、 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  を  $C^r$ -写像とする。 $p_0 \in U, q_0 := \varphi(p_0)$  とおく。今  $\det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(p_0) \neq 0$  とすると、 $(x_{m+1}(p_0), \dots, x_n(p_0))$  の近傍  $W$  と

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$$

が存在して

$$\psi(x_{m+1}(p_0), \dots, x_n(p_0)) = (x_1(p_0), \dots, x_m(p_0))$$

$$\varphi(\psi(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = q_0$$

となる  $C^r$  級写像  $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  が存在する。

陰関数定理の意味は、ヤコビ行列 (写像の線形近似) が極大階数なら局所的には射影と思えるということである。

逆関数定理、陰関数定理ともその線形版を考えると理解しやすい。

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

を線形写像とする。このとき  $A \in M_n(\mathbb{R})$  が存在して

$$\varphi(x) = A \cdot x$$

と書ける。このとき  $\varphi$  のヤコビアンは

$$J\varphi = A$$

で与えられ、 $\det J\varphi = \det A \neq 0$  の仮定から、 $A$  は逆行列を持つ。すなわちヤコビ行列が 0 にならないというのは逆行列が存在することに対応しているのである。

次に陰関数定理の線形版を考えてみよう。

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

を線形写像とする。このとき、 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  が存在して

$$\varphi(x) = A \cdot x$$

と書ける。このときも  $J\varphi = A$  である。さて陰関数定理の条件は、 $A$  の最初の  $n$  列を取った小行列  $B$  の行列式が 0 でないことを意味している。このとき

$$A = (B \mid C), x = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} (x' \in \mathbb{R}^m, x'' \in \mathbb{R}^{n-m})$$

と書くことにすると、方程式

$$Ax = q_0$$

は

$$Bx' + Cx'' = q_0$$

の様に書け、 $\det B \neq 0$  から

$$x' = B^{-1}(q_0 - Cx'')$$

と解ける。このように、 $x'$  は  $x''$  の一次写像で表される。逆関数定理、陰関数定理とも、微分可能写像は、局所的には一次写像でいくらでも近似できることから証明できる。

陰関数定理の意味を考えよう。射影

$$\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

を

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n)$$

で定める。このとき

$$\pi|_{\varphi^{-1}(q_0)}; \varphi^{-1}(q_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

が  $\pi^{-1}(W) \cap \varphi^{-1}(q_0)$  で  $W$  への位相同型を与え、さらに  $\pi^{-1}(W) \cap \varphi^{-1}(q_0)$  が  $W$  からの写像  $\psi: W \longrightarrow \mathbb{R}^m$  のグラフとなっているということを主張している。

### 例 1.3

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおく。

$$df = (2x, 2y)$$

で  $U_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid x \neq 0\}$ ,  $U_2 = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 0\}$  とおく  $U_1$  上で  $\partial f / \partial x = 2x \neq 0$  で  $x = \pm\sqrt{1-y^2}$  と  $x$  は  $y$  の  $C^\infty$  関数として表される ( $x \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \pm 1$ )、また  $U_2$  上では  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$  と  $x$  の  $C^\infty$  関数として表される。

## 1.5 多様体とは何か

$\mathbb{R}^n$  の領域  $D$  を考えよう。 $\mathbb{R}^n$  の標準座標を  $(x_1, \dots, x_n)$  とすると  $D$  上の点はこの座標によって、 $n$  個の実数の組と同一視される。即ち  $D$  上の点の位置を  $n$  個の実数の組で表すことができるわけである。 $D$  上の関数に対して微分が定義され  $D$  上の  $C^\infty$ -関数が定義される。これによって  $D$  上の関数の微分積分の理論が展開された。

このように座標が一つ固定されると微分積分の理論が展開できる。さて座標の概念が定義できるのは  $\mathbb{R}^n$  のように平らに広がった空間だけであろうか。

そこで地球儀の表面を考えてみよう。このような世界では一枚の地図で全体を表すのはあまり得策ではない。5万分の1の地図のように地図を何枚も使って位置を表すのが得策であろう。例えば、東京を移動するには東京都の地図があれば都合がよいであろう。このように平らな世界の貼り合わせとして地球儀を考えることができる。一つの地図の上では縦横に座標を入れると二つの実数の組で、どの地点も正確に表すことができる。しかしこのように何枚もの地図で表すと、同じ地点が何枚もの地図に同時に登場することがあるだろう。つまり、同じ地点をどの地図で見るかによって、その地点を表す実数の組も違って来るわけである。そこで、地図が表



す範囲が重なる場合には、座標の読み替え＝座標変換が生ずる。このように何枚かの地図を貼り合わせて得られる空間を多様体という。多様体は局所的に平らな空間つまり局所的には地図 ( $\mathbb{R}^n$  の領域) と同一視される空間と言うこともできる。数学で扱う空間の大部分はこの多様体である。球面、ドーナツ面などは多様体の典型例である。こういった空間は1点の近くを拡大してゆくと平らに見えてくる。即ち、局所的には平らな空間である。

我々が住む地球の表面も球面であることを考えれば分かるように、数学で扱う空間は  $\mathbb{R}^n$  の領域だけではない。従って、微分積分もより広い空間で展開しておく必要があるわけである。

## 1.6 位相多様体

多様体とは局所的にはユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  または  $\mathbb{C}^n$  の開部分集合と同様な位相空間を言う。

**定義 1.4 (位相多様体)**  $X$  をハウスドルフ位相空間とする。 $X$  が  $n$  次元位相多様体であるとは、 $X$  の各点  $x$  の近傍  $U_x$  と  $\mathbb{R}^n$  の開部分集合への位相同型写像

$$\varphi : U_x \longrightarrow \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n.$$

が存在することである。 $n$  を  $X$  の次元といい、 $\dim X$  で表す。

**例 1.5**  $S^n$  を  $\mathbb{R}^{n+1}$  の単位球面、

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

とする。ここで  $x := (x_1, \dots, x_n)$  に対して  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  である。

このとき  $S^n$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  からの誘導位相に関して位相多様体である。

**証明**  $U_+ = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > -1\}$ ,  $U_- = \{x \in S^n \mid x_{n+1} < 1\}$  とおく。このとき  $S^n = U_+ \cup U_-$  である。

$$\varphi_{\pm} : U_{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

を

$$\varphi_+(x) = \left( \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

$$\varphi_-(x) = \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

で定めると位相同型である。以上から  $S^n$  は位相多様体である。□

$X$  を  $n$  次元位相多様体とし  $U$  をその開部分集合とする。  $U$  から  $\mathbb{R}^n$  への中への位相同型写像

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

を  $U$  上の座標 (**coordinate**) という。  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  と書いた時、各  $x_i (1 \leq i \leq n)$  を座標関数という。  $U$  と  $\varphi$  の組  $(U, \varphi)$  を 座標近傍という。

位相多様体の定義から、位相多様体  $X$  に対して座標近傍の族  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  が存在して  $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$  となる。  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $X$  の座標近傍系と呼ぶ。

## 1.7 可微分多様体

可微分多様体とは、座標変換が可微分関数となるような多様体のことである。

**定義 1.6**  $M$  を位相多様体とする。  $M$  が可微分多様体であるとは座標近傍系  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  で

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が全ての  $\alpha, \beta$  に関して可微分同相写像となることをいう。 このとき座標近傍系  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  を位相多様体  $M$  の可微分構造という。

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

を  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  位相多様体  $M$  に 2 つの可微分構造  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}, \{(V_\mu, \psi_\mu)\}$  が与えられたとする。 これらの可微分構造が同値であるとは、

$$\varphi_\lambda \circ \psi_\mu^{-1} : \psi_\mu(U_\lambda \cap V_\mu) \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda \cap V_\mu)$$

が全ての  $\lambda, \mu$  について可微分同相であることである。

**注意 1.7** 一般に位相多様体  $M$  に 2 つ以上の同値でない可微分多様体の構造が入ることがある。

**例 1.8** 例 1.5 において  $S^n$  は座標近傍系  $(U_\pm, \varphi_\pm)$  により可微分多様体の構造を持つ。

$M$  を  $C^\infty$ -多様体とし、  $p \in M$  とする。  $p$  の近傍で  $C^\infty$  級の関数全体の集合

$$\cup_{p \in U} C^\infty(U)$$

を考える。ここで  $U$  は  $p$  の全ての開近傍を走る。さてこの集合に次の同値関係  $f \in C^\infty(U), g \in C^\infty(V)$  が同値  $\Leftrightarrow p \in \exists W \subseteq U \cap V$  で

$$f|_W \equiv g|_W$$

を入れる。ここで  $W$  は  $p$  のある近傍である。この同値関係による商集合を  $\mathcal{C}_p^\infty$  で表し、 $p$  の近傍で滑らかな関数の芽の集合という。この概念は関数を考えるときいちいち定義域を指定しなくてすむので都合がよい。 $\mathcal{C}_p^\infty$  は自然に環の構造が入る。すなわち  $f, g \in \mathcal{C}_p^\infty$  に対して自然に和と積

$$f + g, f \cdot g$$

が定義される。

## 1.8 接空間

多様体上で微分を行うには**接空間**の概念が必要になる。予想されるように、座標近傍では通常の偏微分を考えることと同じである。

しかし、座標不変な概念として定義するには次のようにする。 $M$  を可微分多様体  $p \in M$  を1つ固定する。

$$D : \mathcal{C}_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

が**微分**であるとは、任意の  $f, g \in \mathcal{C}_p^\infty$  に対して**線形性**

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

及び**ライプニッツ則**

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg$$

が成り立つことである。 $\mathcal{C}_p^\infty$  の微分とはどのようなものであろうか。 $(x_1, \dots, x_n)$  を  $p$  の近傍の局所座標とする。

$$x_1(p) = \dots = x_n(p) = 0$$

として一般性を失わない。 $x_1, \dots, x_n$  は  $\mathcal{C}_p^\infty$  の元を定めるが、それを同じ記号で表そう。 $D$  を微分とし、

$$a_i := Dx_i \in \mathbb{R}$$

とおく。まず

$$D1 = D1^2 = 2D1$$

であるから、 $D1 = 0$  である。これと線形性から  $D$  は定数関数の芽は全て  $0$  に写す。 $f \in C_p^\infty$  は  $p$  の近傍でテーラー展開

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\theta x)x_i x_j (0 < \theta < 1)$$

と展開される。両辺に  $D$  を作用させると  $x_i(p) = 0 (1 \leq i \leq n)$  であるから

$$Df = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

となる。すなわち

$$D = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

である。

このことから  $C_p^\infty$  の微分全体は

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

を基底とする  $n$  次元  $\mathbb{R}$  ベクトル空間である。 $C_p^\infty$  の微分全体を  $TM_p$  で表し、 $M$  の  $p$  に於ける接空間 (tangent space) と呼ぶ。

**例 1.9**  $\mathbb{R}^n$  の接空間は各  $p \in \mathbb{R}^n$  で  $\{(\partial/\partial x_1)_p, \dots, (\partial/\partial x_n)_p\}$  で張られる空間である。

## 1.9 外積代数

$V_1, \dots, V_p$  を有限次元実ベクトル空間とする。 $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$  上の関数  $f(v_1, \dots, v_p)$  が

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i + \beta v_i, v_{i+1}, \dots, v_p) =$$

$$\alpha f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p) + \beta f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p)$$

が全ての  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  と  $1 \leq i \leq p$  について成立するとき  $p$  次線形形式 (p-linear form) と呼ぶ。 $p$  次線形形式は自然な和、スカラー一倍に関してベクトル空間となる。この線形空間を

$$V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_p^*$$

で表す。

$f \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_p^*, g \in W_1^* \otimes W_2^* \otimes \cdots \otimes W_q^*$  に対して、そのテンソル積  $f \otimes g$  を

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) = f(v_1, \dots, v_p)g(w_1, \dots, w_q)$$

で定義する。 $f \otimes g \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_p^* \otimes W_1^* \otimes W_2^* \otimes \cdots \otimes W_q^*$  である。 $V_i$  の基底を  $\{e_{1,i}, \dots, e_{n_i,i}\}$ 、その双対基底を  $\{e_{1,i}^*, \dots, e_{n_i,i}^*\}$  で表すと  $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$  の基底として

$$\{e_{i_1,1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p,p}^* \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_p \leq n_p\}$$

がとれる。これから

$$\dim V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_p^* = n_1 \cdots n_p$$

であることが分かる。特に  $V$  を  $n$  次元実ベクトル空間とし  $\{e_1, \dots, e_n\}$  を  $V$  の一つの基底とすると  $\otimes^p V^*$  の基底は

$$\{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq p\}$$

で与えられる。任意の  $f \in \otimes^p V^*$  の元は

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n f_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*$$

と一意的に表される。ここで各  $f_{i_1, \dots, i_p}$  は実数である。この  $f_{i_1, \dots, i_p}$  を  $f$  の  $i_1, \dots, i_p$  成分とよぶ。

## 1.10 対称テンソルと交代テンソル

$\Sigma_p$  を  $\{1, 2, \dots, p\}$  の置換の作る置換群を表すことにする。 $\Sigma_p$  の位数は  $p!$  である。 $f$  を  $\$ \forall V$  上の  $p$  次線形形式とする。 $\sigma \in \Sigma_p$  の  $f$  への作用を

$$(\sigma f)(v_1, \dots, v_p) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

と定める。 $V$  上の  $p$  次線形形式  $f$  が  $p$  次対称形式であるとは  $\sigma f = f (\forall \sigma \in \Sigma_p)$  が成立することである。

$V$  上の  $p$  次線形形式  $f$  が  $p$  次交代形式であるとは  $\sigma f = \text{sgn} \sigma f (\forall \sigma \in \Sigma_p)$  が成立することである。ここで  $\text{sgn} \sigma$  は  $\sigma$  の符号数、即ち

$$\text{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換のとき}) \end{cases}$$

である。 $\otimes^p V^*$  上の一次変換  $S_p, A_p$  を

$$S_p f := \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \sigma f, A_p f := \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \text{sgn} \sigma \cdot \sigma f$$

で定義する。 $S_p$  を  $p$  次対称化作用素  $A_p$  を  $p$  次交代化作用素と呼ぶ。

$f$  が  $p$  次線形形式なら  $S_p f, A_p f$  はそれぞれ  $p$  次対称形式、 $p$  次交代形式である。また  $f$  が  $p$  次対称形式なら  $S_p f = p!f$ ,  $f$  が  $p$  次交代形式なら  $A_p f = p!f$  である。従って  $f$  が  $p$  次線形形式であるなら

$$S_p^2 f = p!S_p f, A_p^2 f = p!A_p f$$

が成り立つ。

**問題 1.10**  $f$  が  $p$  次対称形式なら  $A_p f = 0$ ,  $f$  が  $p$  次交代形式なら  $S_p f = 0$  を証明せよ。

### 1.11 外積代数

ここでは微分形式の定義のために、外積代数を導入する。

$\wedge^p V^*$  で  $V$  上の  $p$  次交代形式全体を表す。一般に  $f \in \wedge^p V^*, g \in \wedge^q V^*$  に対して  $f \wedge g \in \wedge^{p+q} V^*$  を

$$f \wedge g := \frac{1}{p!q!} A_{p+q}(f \otimes g)$$

で定義して  $f$  と  $g$  の外積という。 $f \in \wedge^p V^*, g \in \wedge^q V^*, h \in \wedge^r V^*$  とすると結合律

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

が成り立つ。

### 1.12 多様体上の微分形式

多様体の微分形式は積分のために導入された一種の密度（あるいは測度）概念である。 $p$  次形式は、 $p$  サイクル上で積分すると実数値をとる。このように、ホモロジーの双対概念が、微分形式から登場する（ドラームコホモロジー）ことは定義から納得されるであろう。

$M$  を  $n$  次元  $C^\infty$  多様体とする。 $\varphi$  が  $M$  上の  $p$  次微分形式であるとは任意の  $x \in M$  と  $x$  の近傍の局所座標  $(x_1, \dots, x_n)$  に対して

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varphi_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} (\varphi_{i_1, \dots, i_p} \in \mathcal{C}_x^\infty)$$

となることをいう。 $M$  上の  $p$  次微分形式全体の空間を  $A^p(M)$  で表す。

$\varphi \in A^p(M)$  の外微分  $d\varphi$  を

$$d\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\varphi_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} (\varphi_{i_1, \dots, i_p} \in \mathcal{C}_x^\infty)$$

で定義する。

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi$$

が成り立つ。外微分の定義は局所座標の取り方に依らない。実際  $(y_1, \dots, y_n)$  をもう一つの座標とすると

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varphi_{i_1, \dots, i_p} \left( \sum_{i=1}^n \frac{dx_{i_1}}{dy_i} dy_i \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i=1}^n \frac{dx_{i_p}}{dy_i} dy_i \right)$$

である。

$$d\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\varphi_{i_1, \dots, i_p} \left( \sum_{i=1}^n \frac{dx_{i_1}}{dy_i} dy_i \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i=1}^n \frac{dx_{i_p}}{dy_i} dy_i \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\varphi_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

**定理 1.11**  $d^2 = 0$  である。

**証明** 局所的な命題であることに注意する。 $x \in M$  とし  $x$  の近傍での局所座標を  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  とする。 $f \in C^\infty(M)_x$  とすると

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (dx_i \wedge dx_j + dx_j \wedge dx_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

## 2 多変数関数論からの準備

ここでは一変数正則関数の知識を仮定して、多変数正則関数について必要な事柄をまとめておく。

### 2.1 多変数正則関数

$\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とする。 $(z_1, \dots, z_n)$  を  $\mathbb{C}^n$  の標準座標とする。

$$z_k = x_k + \sqrt{-1}y_k \quad (x_k, y_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n)$$

と実部、虚部に分解しておく。 $f \in C^\infty(\Omega)$  に対して

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sqrt{-1} \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおく。また  $1 \leq k \leq n$  に対して

$$dz_k = dx_k + \sqrt{-1}dy_k, d\bar{z}_k = dx_k - \sqrt{-1}dy_k,$$

とおく。

$$dz_i(\partial/\partial z_j) = \delta_{ij}, d\bar{z}_i(\partial/\partial \bar{z}_j) = \delta_{ij},$$

が成り立つ。即ち  $\{dz_1, \dots, dz_n\}$  と  $\{\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n\}$ 、 $\{d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n\}$  と  $\{\partial/\partial \bar{z}_1, \dots, \partial/\partial \bar{z}_n\}$  は互いに双対である。

さて  $f \in C^\infty(\Omega)$  に対して

$$\partial f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k, \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

とおく。このときライプニッツ則

$$\partial(f \cdot g) = (\partial f) \cdot g + f \cdot \partial g, \bar{\partial}(f \cdot g) = (\bar{\partial} f) \cdot g + f \cdot \bar{\partial} g$$

が成り立つ。

**定義 2.1**  $\Omega$  上の  $C^\infty$  関数  $f$  が正則であるとは  $\bar{\partial} f = 0$  が成り立つことである。

定義から  $z_1, \dots, z_n$  は全て正則であり、またライプニッツ則から、 $z_1, \dots, z_n$  の複素係数多項式もまた正則である。従って  $z_1, \dots, z_n$  の収束べき級数

$$\sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$$

もその一様収束域で正則である。

## 2.2 正則写像に関する逆関数定理、陰関数定理

$U$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とする。  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^n$  が正則写像であるとは

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

と成分表示をした時、各  $\varphi_i (1 \leq i \leq n)$  が  $U$  上の正則関数となることをいう。

この節では正則写像に関する逆関数定理、陰関数定理を紹介する。

**定理 2.2** (逆関数定理)  $U$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とする。  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^n$  を正則写像とする。  $p_0 \in U$  で  $(\det J\varphi)(p_0) \neq 0$  ならば、 $p_0$  の近傍  $U$  と  $\varphi(p_0)$  の近傍  $V$  が存在して、 $\varphi|_U: U \rightarrow V$  は  $U$  から  $V$  への正則同相写像を与える。



**定理 2.3** (陰関数定理)  $U$  を  $\mathbf{C}^n$  の領域とする。  $m < n$  とし、  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{C}^m$  を正則写像とする。  $p_0 \in U, q_0 := \varphi(p_0)$  とおく。 今  $\det \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(z_1, \dots, z_m)}(p_0) \neq 0$  とすると、  $(z_{m+1}(p_0), \dots, z_n(p_0))$  の近傍  $W$  と

$$\psi : W \rightarrow \mathbf{C}^m$$

が存在して

$$\psi(z_{m+1}(p_0), \dots, z_n(p_0)) = (z_1(p_0), \dots, z_m(p_0))$$

$$\varphi(\psi(z_{m+1}, \dots, z_n), z_{m+1}, \dots, z_n) = q_0$$

となる正則写像  $\psi : W \rightarrow \mathbf{C}^m$  が存在する。

### 2.3 ワイエルストラスの予備定理

**定義 2.4**  $(z, w) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$  の点  $(z_0, w_0)$  において  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{n-1}, z_0}$  上の多項式

$$p(z, w) = f_m(z)(w - w_0)^m + \dots + f_0(z)$$

を**擬多項式 (pseudopolynomial)** という。 また  $f_m$  が 0 でない定数で、  $f_{m-1}(z_0) = \dots = f_0(z_0) = 0$  のとき**特殊擬多項式 (distinguished pseudopolynomial)** 又はワイヤストラス多項式 (*Weierstrass polynomial*) という。

次のワイヤストラスの予備定理は、正則関数の局所理論の展開になくってはならないものである。

**定理 2.5** (ワイヤストラスの予備定理)  $(z_0, w_0) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$  に対し  $f$  が  $(z_0, w_0)$  の近傍で正則で、  $f(z_0, w_0) = 0$  かつ  $f(O, w) \not\equiv 0$  とする。 このとき  $(z_0, w_0)$  を中心とする特殊擬多項式  $p(z, w)$  と  $(z_0, w_0)$  の近傍で 0 にならない正則関数  $q(z, w)$  を選んで  $(z_0, w_0)$  の近傍で

$$f(z, w) = p(z, w) \cdot q(z, w)$$

と表示される。

**証明** 平行移動して  $(z_0, w_0) = O$  として構わない。 正数  $r, s$  を十分小さくとして  $f$  は  $\Delta(r)^{n-1} \times \Delta(s)$  で正則とする。 また  $f(O, w)$  は  $w = 0$  で  $m$  位の零点を持つものとする。  $f(O, w)$  の零点は孤立しているので、  $r$  を十分小さくとして、正数  $\varepsilon$  が存在して

$$f(O, w) > \varepsilon$$

が  $\{O\} \times \partial\Delta(s)$  が成り立つとしてよい。 さて  $r$  を小さくとして

$$|f(z, w) - f(O, w)| < \varepsilon < |f(O, w)|$$

が  $\Delta^{n-1}(r) \times \partial\Delta(s)$  で成り立つとしてよい。ルシエ(Rouché)の定理から、 $z \in \Delta^{n-1}(r)$  を固定すると  $w$  の方程式

$$f(z, w) = 0$$

は  $\Delta(s)$  の内部に丁度  $m$  個の根を持つ。それらを  $\alpha_1(z), \dots, \alpha_m(z)$  とする。

$$p(z, w) = \prod_{i=1}^m (w - \alpha_i(z))$$

とおくと、左辺を展開すると  $w$  の係数は全て  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  の基本対称式で、それらは  $\Delta(r)$  上正則である。従って  $p(z, w)$  は特殊擬多項式である。さて

$$q(z, w) = f(z, w)/p(z, w)$$

と定義すると、 $q(z, w)$  は  $p$  の零点集合を除いて  $\Delta^{n-1}(r) \times \partial\Delta(s)$  で正則かつ有界である。従ってリーマンの除去可能定理により、 $q(z, w)$  は  $\Delta^{n-1}(r) \times \partial\Delta(s)$  上正則で、かつ、定義から  $\Delta^{n-1}(r) \times \partial\Delta(s)$  で零点を持たない。従って  $\Delta^{n-1}(r) \times \partial\Delta(s)$  で求める表示

$$f(z, w) = p(z, w) \cdot q(z, w)$$

が得られた。□

このワイヤストラスの予備定理の眼目は、正則関数の零点集合は十分小さな近傍に限れば、**変数が一つ少ない**正則関数上の多項式環の元の零点集合として書けるということである。

**定理 2.6**  $\mathcal{O}_{X,x}$  はネーター環である。

## 2.4 有理型関数

有理型関数とは、**局所的に**正則関数の商として書ける関数のことである。コンパクト複素多様体の上には、定数以外に正則関数は存在しない。だから有理型関数はコンパクト複素多様体の理論では中心的な役割を果たすのである。

**定義 2.7**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とする。 $f$  が  $\Omega$  上の**有理型関数 (meromorphic function)** であるとは、 $f$  は除外集合  $E$  を除いて  $\Omega - E$  上正則で、 $\Omega$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  と  $U_\alpha$  上の正則関数  $p_\alpha, q_\alpha$  ( $q_\alpha \neq 0$  が存在して

$$f|_{U_\alpha - E} = p_\alpha/q_\alpha$$

と表されることである。但し  $E$  は  $\Omega$  の部分集合として  $\Omega$  の内点を含まず、 $\Omega - E$  は連結であるとする。

即ち**有理型関数とは局所的に正則関数の商として表される関数のこと**で、解析接続の一意性から分母が 0 にならない点で値は確定しているとしてよい。

## 2.5 多重劣調和関数

多重劣調和関数は多変数関数論において中心的な役割を果たすものである。それは後に「多重劣調和関数は自明な直線束の正曲率計量である」というように理解されるであろう。

**定義 2.8**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  の領域とする。  $u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$  が劣調和関数であるとは、

1.  $\varphi$  は上半連続である。 即ち任意の  $c \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{z \in \Omega \mid u(z) < c\}$$

は開集合である。

2. 任意のコンパクト部分集合  $K \subset \Omega$  と  $\Omega$  の内部で調和かつ境界  $\partial\Omega$  で連続な関数  $h$  に対して、境界上で  $u \leq h$  なら  $K$  全体で  $u \leq h$  が成り立つ。

「劣調和」というのは調和関数より小さいという意味である。上の定義で恒等的に  $-\infty$  の関数も劣調和であることに注意する。

**定理 2.9**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  の領域、  $u$  を  $\Omega$  上の上半連続関数であるとする。このとき次は同値である。

1.  $u$  は劣調和である。
2. 任意の  $\Delta(z, r) \subset \subset \Omega$  に対して、

$$\varphi(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

が成り立つ（これを**劣平均値性 (submeanvalue property)** という）。

**証明**

$1 \Rightarrow 2$   $u$  を  $\Omega$  上の劣調和関数、  $\Delta(z, r) \subset \subset \Omega$  とする。このとき  $\Delta(z, r)$  の境界  $\{z + re^{\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$  上の実関数  $\varphi(\theta)$  が

$$u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) \leq \varphi(\theta)$$

を満たしているとする。

$$\varphi(\theta) = \sum a_n e^{\sqrt{-1}n\theta}$$

を  $\varphi$  のフーリエ展開とする。

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

である。このとき正則関数

$$f(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\zeta - z)^n}{r^n}$$

の実部は調和関数で、劣調和関数の定義から

$$u(z) \leq f(z) = a_0$$

が成り立つ。従って、 $\varphi$  を上から  $u \mid \partial\Delta(z, r)$  に近づけると

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

が成り立つ。

2  $\Rightarrow$  1  $K \subset \Omega$  を  $\Omega$  のコンパクト部分集合で  $h$  を  $K$  上連続かつ内部で調和な関数で  $\partial K$  上で  $u \leq h$  が成立しているものとする。さて  $u - h$  が  $K$  上で正の最大値をとる点  $z_0 \in K$  が存在するとすると仮定から  $z_0$  は  $K$  の内点である。 $r_0 > 0$  を十分小さくとり  $\Delta(z_0, r_0) \subset K$  となるようにする。すると

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

と

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + r_0 e^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

より

$$u(z_0) - h(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(z_0 + r_0 e^{\sqrt{-1}\theta}) - h(z_0 + r_0 e^{\sqrt{-1}\theta})\} d\theta$$

となり、 $\partial\Delta(z_0, r_0)$  上で  $u - h$  は恒等的に  $M$  となる。 $r_0$  は任意の  $(0, r_0)$  に置き換えられるので  $u(z) - h(z) = M$  となる点は  $K$  上で開集合をなす。またこの集合が開集合であることは明らかであるからこれは  $\partial K$  上で  $u - h \leq 0$  であることに矛盾する。したがって  $M = 0$  となり証明を終わる。  $\square$

劣調和の概念の多変数への拡張の一つが次の多重劣調和関数である。

**定義 2.10**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n \varphi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$  が劣調和関数であるとは、

1.  $\varphi$  は上半連続である。即ち任意の  $c \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{z \in \Omega \mid \varphi(z) < c\}$$

は開集合である。

2. 任意の  $z \in \Omega$  と任意の  $w \in \mathbb{C}^n$  に対して  $\varphi(z + tw)$  は  $t$  の関数として  $t = 0$  の近傍で劣調和である。

$\Omega$  上の多重劣調和関数の全体を  $PSH(\Omega)$  で表す。

**命題 2.11**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とすると次が成り立つ。

1.  $u_1, u_2 \in PSH(\Omega)$  とすると  $u_1 + u_2 \in PSH(\Omega)$ 。

2.  $u_1, u_2 \in PSH(\Omega)$  とすると  $\max\{u_1, u_2\} \in PSH(\Omega)$ 。
3.  $\{u_i\}, u_i \in PSH(\Omega)$  を  $\Omega$  の各点で広義単調減少列とすると、 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i \in PSH(\Omega)$  である。

**定理 2.12**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とし  $u \in PSH(\Omega)$  とする。  $\varphi$  を  $\mathbb{R}$  上の下に凸の単調増加関数とする。このとき合成関数  $\varphi(u)$  も  $\Omega$  上の多重劣調和関数である。

**証明**  $n = 1$  のとき証明すれば十分である。  $x_0 \in \mathbb{R}$  とすると

$$\varphi(x) \geq c(x - x_0) + \varphi(x_0)$$

となる正数  $c$  が存在する。  $\Delta(z, r) \subset \subset \Omega$  とする。

$$\int_0^{2\pi} \varphi(u(z + re^{\sqrt{-1}\theta})) d\theta \geq c \left( \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta - x_0 \right) + \varphi(x_0)$$

今

$$x_0 = \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

を代入して

$$\int_0^{2\pi} \varphi(u(z + re^{\sqrt{-1}\theta})) d\theta \geq \varphi \left( \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta \right)$$

となるが  $u$  の劣調和性から

$$\varphi(u(z)) \leq \int_0^{2\pi} \varphi(u(z + re^{\sqrt{-1}\theta})) d\theta$$

となるから、定理 2.9 により  $\varphi(u)$  は劣調和である。□

**定理 2.13**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域とする。  $u \in PSH(\Omega)$  が  $\Omega$  上恒等的に  $-\infty$  ではないとすると、  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  である。特に  $\{z \in \Omega \mid u(z) = -\infty\}$  はルベーグ測度 0 である。

**証明**  $n = 1$  の時証明すれば十分である。

$$E := \{z \in \Omega \mid u \notin L^1_{loc}(\Omega, z)\}$$

とおく。  $z \in \Omega$  で  $u(z) \neq -\infty$  であるとする。今  $R > 0$  を  $\Delta(z, R) \subset \Omega$  となるようにとると劣平均値性から

$$u(z) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta r dr$$

が成り立つ。即ち  $d\mu$  をルベーグ測度として

$$u(z) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{\Delta(z, R)} u(a) d\mu(a)$$

となる。従って、 $\Delta(z, R) \cap E = \emptyset$  である。即ち  $\Omega - E$  は開集合である。

一方  $E$  は定義により開集合である。 $\Omega$  は連結であるから  $E = \emptyset$  となる。

□

**定義 2.14**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域、 $u \in PSH(\Omega)$  とするとき

$$\{z \in \Omega \mid u(z) = -\infty\}$$

を  $u$  の多重極集合 (pluripolar set) という。

### 3 複素多様体

#### 3.1 複素多様体

座標変換が可微分な多様体を可微分多様体と言ったのと同様に、座標変換が正則写像になる多様体を複素多様体という。この複素多様体が我々の興味の対象である。

**定義 3.1**  $M$  をハウスドルフ位相空間とする。 $M$  が  $n$  次元複素多様体であるとは  $M$  の開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と各  $U_\lambda$  から  $\mathbb{C}^n$  の開部分集合への同相写像

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{C}^n$$

が与えられ

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が全ての  $\alpha, \beta$  に対して双正則写像となっていることをいう。 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  を正則座標近傍系と呼び、正則座標近傍系を与えることを  $M$  の複素構造を定めるといふ。

**例 3.2** (複素射影空間)  $\mathbb{C}^{n+1} - \{O\}$  に同値関係  $\sim$  を

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}^* (= \mathbb{C} - \{0\}) \text{ s.t. } (z_0, \dots, z_n) = (\alpha z'_0, \dots, \alpha z'_n)$$

で定義する。

$$\mathbf{P}^n := \mathbb{C}^{n+1} - \{O\} / \sim$$

を  $n$  次元複素射影空間という。 $(z_0, \dots, z_n)$  の同値類を  $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$  で表す。このとき  $i = 0, 1, \dots, n$  に対し

$$U_i := \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbf{CP}^n \mid z_i \neq 0\}$$

とおく。このとき

$$\mathbf{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$$

が成り立つ。

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{O\} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$$

を

$$\pi(z_0, \dots, z_n) := [z_0 : z_1 : \dots : z_n]$$

で定義される自然な写像とする。商位相の定義から  $U \in \mathbf{CP}^n$  が開集合であるというのは  $\pi^{-1}(U)$  が  $\mathbb{C}^{n+1} - \{O\}$  の部分集合として開集合であるのと同値である。さて

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - O \mid z_i \neq 0\}$$

であるから商位相の定義から  $U_i$  は開集合である。さらに

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

を

$$\phi_i([z_0 : z_1 : \dots : z_n]) := (z_0/z_i, \dots, \hat{z_i/z_i}, \dots, z_n/z_i)$$

で定めると全単射で逆写像は

$$\phi_i^{-1}(w_1, \dots, w_n) = [w_1 : \dots : w_i : 1 : w_{i+1} : \dots : w_n]$$

となる。従って、各  $U_i$  は  $\mathbb{C}^n$  と同相である。よって  $\mathbf{P}^n$  は  $\mathbb{C}^n$  を  $n+1$  枚貼り合わせたものであると言える。

陰関数定理を用いると複素多様体の例は大量に存在することが分かる。

**例 3.3**  $n$  を自然数とするとき

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^n + y^n = 1\}$$

と置くと  $1$  次元複素多様体である。 $f(x, y) = x^n + y^n - 1$  とおくと

$$df = nx^{n-1}dx + ny^{n-1}dy,$$

であるから、 $f$  の零点集合  $C$  上で  $df$  は決して  $0$  にならない、即ち

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

は  $C$  上至る所、階数  $1$  である。従って陰関数定理から、 $C$  の各点  $p$  の近傍で  $\mathbb{C}^2$  上の正則関数  $x$  または  $y$  の  $C$  への制限が正則局所座標を与えることがわかる。

コンパクトな複素多様体は例えば、射影空間の部分多様体として構成できる。

### 例 3.4

$$X = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{P}^2 \mid z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0\}$$

とおくと  $X$  はコンパクト 1 次元複素多様体である。実際

$$U_i = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{P}^2 \mid z_i \neq 0\} \quad (i = 0, 1, 2)$$

とおくと、

$$U_0 \cap X = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in U_0 \mid 1 + \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n + \left(\frac{z_2}{z_0}\right)^n = 0\}$$

で  $U_0$  上の  $\mathbf{P}^2$  の座標が  $(z_1/z_0, z_2/z_0)$  で与えられることから例 3.3 と同様に  
して、 $U_0 \cap X$  は複素多様体である。同様に  $U_i \cap X$  ( $i = 1, 2$ ) も複素多様  
体であるから、 $X$  は複素多様体である。

## 3.2 複素多様体間の正則写像

**定義 3.5**  $X, Y$  をそれぞれ複素多様体とする。連続写像  $f : X \rightarrow Y$  が**正則写像 (holomorphic map)** であるとは、 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V, \psi_\beta)\}$  を  $X, Y$  それ  
ぞれの正則座標近傍系とするとき  $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$  上で

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

が  $\mathbb{C}^{\dim X}$  の開部分集合から  $\mathbb{C}^{\dim Y}$  の開部分集合への正則写像を与えること  
をいう。

この定義が  $X, Y$  の複素構造にのみよることは直ちに確かめられる。

一般に複素多様体の間に、定値写像でないような正則写像が存在することは  
稀である。  $f : X \rightarrow Y$  が正則全単射でありかつ  $f^{-1}$  も正則であるとき  
**双正則写像 (biholomorphic map)** といい、 $X, Y$  は双正則同値であるとい  
う。双正則同値であれば、可微分同相であり、従ってそれぞれの次元は等し  
くなる。

$X$  を複素多様体とするとき  $\mathbb{C}$  への正則写像を  $X$  上の**正則関数**という。

**問題 3.6**  $X$  をコンパクト複素多様体とすると、 $X$  上の正則関数は全て定値  
関数であること証明せよ。

## 3.3 正則接空間、正則余接空間

$n$  次元複素多様体  $X$  と  $X$  上の点  $x$  とその近傍  $U$  の正則局所座標を  $(z_1, \dots, z_n)$   
をとる。このとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_x$$



で張られる  $n$  次元複素ベクトル空間を  $TX_x$  で表し、複素多様体  $X$  の点  $x$  における**正則接空間 (holomorphic tangent space)** という。この記号は実多様体の場合と同じであるが、複素多様体  $X$  に関しては、その実多様体としての接空間は  $TX_{\mathbb{R}}$  と書いて区別する。

一方

$$(dz_1)_x, \dots, (dz_n)_x$$

で張られる  $n$  次元複素ベクトル空間を  $T^*X_x$  で表し、複素多様体  $X$  の点  $x$  における**正則接空間 (holomorphic tangent space)** という。  $x$  の近傍で正則な関数全体の集合を  $\mathcal{O}_{X,x}$  で表すことにすると 1.8 と同様に  $TX_x$  は  $\mathcal{O}_{X,x}$  上の**微分**として特徴付けられる。即ち線形写像

$$D : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathbb{C}$$

でライプニッツ則

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg \quad (f, g \in \mathcal{O}_{X,x})$$

を満たすものとして特徴付けられる。

$X, Y$  を複素多様体、  $f : X \longrightarrow Y$  を正則写像とすると、各点  $x \in X$  に対して

$$(df)_x : TX_x \longrightarrow TY_{f(x)}$$

が定義される。

今  $x$  の近傍で正則な関数全体の集合を  $\mathcal{O}_{X,x}$ 、  $f(x)$  の近傍で正則な関数の全体  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$  で表すと

$$f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

が、  $\phi \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}$  に対して

$$f^*\phi := \phi \circ f$$

により定義される。従って微分の間射として

$$df_x : TX_x \longrightarrow TY_{f(x)}$$

が定義される。またその双対写像として

$$f^* : T^*Y_{f(x)} \longrightarrow T^*X_x$$

が得られる。

### 3.4 複素多様体上の微分形式

複素多様体上の微分形式は  $(p, q)$  形式の和に分解することを解説する。  
 $X$  を複素多様体とし、 $x \in X$  に対して

$$\wedge^p T^* X \otimes \wedge^q \overline{T^* X}$$

の元を  $x$  における  $(p, q)$  形式と呼ぶ。 $X$  上の  $C^\infty(p, q)$  形式とは、各正則座標近傍  $(U, z_1, \dots, z_n)$  上で

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge dz_J, f_{IJ} \in C^\infty(U)$$

と書ける複素微分形式のことである。但し、左辺で  $I = (i_1, \dots, i_p), J = (j_1, \dots, j_q)$  で共に単調、即ち  $i_1 < \dots < i_p$  及び  $j_1 < \dots < j_q$  となるものの和を表す。またここで  $|I| = p, |J| = q$  は多重添え字の長さを表す。今後、常に単調なもののみを和を考えるものとする。

$X$  上の  $C^\infty(p, q)$  形式全体のベクトル空間を  $A^{p,q}(X)$  で表す。このとき

$$\partial : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p+1,q}(X)$$

が

$$\partial f = \sum_{|I|=p, |J|=q} \partial f_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{|I|=p, |J|=q} \bar{\partial} f_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

で定義され、

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

が成り立つ。 $d^2 = 0$  だから

$$\partial^2 = 0, \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \bar{\partial}^2 = 0$$

が成り立つ。

今  $X$  上の複素係数  $r$  形式全体を  $A^r(X)$  で表すと

$$A^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}(X)$$

と直和分解する。 $A^{*,*}(X) = \bigoplus_{p,q=0}^{\dim X} A^{p,q}(X)$  は、外積に関して、結合的代数になる。

### 3.5 カレント

前節では、複素多様体上の微分形式について考察したが、ここでは、重要な概念である複素多様体上のカレントについて解説する。

カレントというのは一言でいうと超関数係数の微分形式のことである。このように滑らかでない係数を持つ微分形式について考えることが複素多様体を扱う際に本質的に重要であることが最近益々明らかになってきたように思われる。こういった現象は、代数幾何学において、滑らかな代数多様体だけを考察するのでは代数幾何学の展開に支障が出るという事情を彷彿されるものである。

$X$  を  $n$  次元複素多様体、 $A_c^{p,q}(X)$  でコンパクトな台を持つ  $C^\infty(p,q)$  形式全体の空間とし、 $A_0^{p,q}(X)$  に次のような位相を入れる。

$\{\varphi_k\}$  が収束  $\Leftrightarrow$  あるコンパクト集合  $K \subset X$  が存在して全ての  $k$  に対して  $\text{Supp } \varphi_k \subset K$  で  $\varphi_k$  及び全ての偏微分がそれぞれ  $K$  上一様収束

**定義 3.7**  $X$  を  $n$  次元複素多様体とする。  $T$  が  $X$  上の  $(p,q)$  カレント (current) であるとは、連続線形汎関数

$$T : A_c^{n-p,n-q}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

のことである。

$X$  上の  $(p,q)$  カレント全体の空間を  $\mathcal{D}^{p,q}(X)$  で表す。カレントの微分

$$\partial : \mathcal{D}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^{p+1,q}(X), \bar{\partial} : \mathcal{D}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^{p,q+1}(X)$$

$$\bar{\partial} : \mathcal{D}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^{p,q+1}(X)$$

をそれぞれ

$$(\partial T)(\varphi) = (-1)^{p+q+1} T(\partial\varphi) \quad (\varphi \in A_c^{n-p-1,n-q}(X))$$

$$(\bar{\partial} T)(\varphi) = (-1)^{p+q+1} T(\bar{\partial}\varphi) \quad (\varphi \in A_c^{n-p,n-q-1}(X))$$

で定義する。この定義は  $A_c^{*,*}(X)$  の位相の定義から正当化される。また

$$d = \partial + \bar{\partial} : \mathcal{D}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^{p+1,q}(X) + \mathcal{D}^{p,q+1}(X)$$

が定義される。 $T \in \mathcal{D}^{p,q}(X)$  は

$$dT = 0$$

を満たすとき  $d$  閉カレント ( $d$ -closed current) という。また  $T \in \mathcal{D}^{p,q}(X)$  の複素共役  $\bar{T} \in \mathcal{D}^{q,p}$  を

$$\bar{T}(\varphi) := \overline{T(\bar{\varphi})} \quad (\varphi \in A_c^{q,p}(X))$$

で定義する。 $T \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$  が実カレント (real current) であるとは  $T = \bar{T}$  を満たすことである。また、実カレント  $T \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$  が正カレント (positive current) であるとは

$$(\sqrt{-1})^{p(n-p)} T(\eta \wedge \bar{\eta}) \geq 0 \quad (\eta \in A_c^{n-p,0}(X))$$

が成り立つことである。

**例 3.8**  $\eta \in A^{p,q}(X)$  とすると

$$\eta(\varphi) := \int_X \eta \wedge \varphi \quad (\varphi \in A_c^{n-p,n-q}(X))$$

と定義すると  $\eta$  は  $(p, q)$  カレントである。 $\varphi$  が  $d\varphi = 0$  を満たせば、 $\eta$  は  $d$  閉である。

**例 3.9**  $X$  を  $n$  次元複素多様体  $V$  を余次元  $k$  の複素部分多様体であるとする。このとき  $\varphi \in A_c^{n-k,n-k}(X)$  に対して

$$V(\varphi) := \int_V \varphi$$

で定義すると、正閉  $(k, k)$  カレントである。

$f: X \rightarrow Y$  を固有正則写像、即ち  $Y$  の任意のコンパクト集合の逆像がコンパクトであるような、正則写像であるとする。

このとき  $X$  上のカレント  $T$  に対して  $Y$  上のカレント  $f_*T$  を

$$f_*T(\varphi) := T(f^*\varphi) \quad (\varphi \in A_c^{n-p,n-q}(Y))$$

で定義する。このことと、広中の特異点解消定理から次の定理が得られる。

**定理 3.10**  $X$  を  $n$  次元複素多様体  $V$  を余次元  $k$  の解析的集合であるとする。このとき  $\varphi \in A_c^{n-k,n-k}(X)$  に対して

$$V(\varphi) := \int_V \varphi$$

で定義すると、正閉  $(k, k)$  カレントである。

$\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域、 $T$  を  $\Omega$  上の正閉  $(q, q)$  カレントであるとする。 $p \in \Omega$  に対して

$$\nu(T, p, r) = \frac{1}{r^{2(n-q)}} \int_{\|z-p\| < r} T(z) \wedge (dd^c \|z\|^2)^{n-q}.$$

とおく。 $T$  の  $p$  におけるルロン数 (Lelong number) を

$$\nu(T, p) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \nu(T, p, r).$$

で定義する。

## 4 層とコホモロジー

この節では、複素多様体の研究に欠かせない、層と層係数コホモロジーについて解説する。層係数のコホモロジーの定義には、様々なものがあるが、ここではチェックコホモロジーを用いる。その主な理由は、直観的な理解ができるからである。

### 4.1 層の定義

層とは直観的には、「関数」とその定義域を同時に考えたものである。

**定義 4.1** (前層)  $X$  を位相空間とする。 $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  とは  $X$  の開集合  $U$  に

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)$$

加群  $\mathcal{F}(U)$  を対応させる写像の族と、包含関係  $U \supset V$  を満たす開集合の組  $U, V$  に対して制限準同型と呼ばれる準同型

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

が与えられ、推移律

$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$$

が全ての  $U \supset V \supset W$  を満たす開集合の三つ組について成り立つことをいう。但し  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$  とおく。

$\mathcal{F}(U)$  の元を  $\mathcal{F}$  の  $U$  上の切断 (**section**) と呼ぶ。しばしば  $\mathcal{F}(U)$  を  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  と書く。また通常  $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  の  $V$  への制限  $\rho_{UV}(\sigma)$  を  $\sigma|_V$  のように書き  $\rho_{UV}$  を明示しない略記を行なう。

**定義 4.2** (層) 前層  $\mathcal{F}$  が以下の性質を満たす時、層と呼ばれる。

1.  $\mathcal{U}_\alpha$  を  $X$  の開集合  $U$  の開被覆とする。 $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  が全ての  $\alpha$  について  $\sigma|_{U_\alpha} = 0$  を満たせば  $\mathcal{F}(U)$  の元として  $\sigma = 0$  が成り立つ。
2.  $\mathcal{U}_\alpha$  を  $X$  の開集合  $U$  の開被覆とする。このとき  $\{\sigma_\alpha\}, \sigma_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$  が貼りあわせ条件:

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sigma_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

を全ての添え字  $\alpha, \beta$  について満たせば、ある  $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  が存在して  $\sigma|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha$  が全ての  $\alpha$  について成り立つ。

初めの条件を一致の原理、2番目の条件を貼り合わせの原理という。これらの条件は、層が局所的な性質により規定されていることを表している。

次の例が示すように前層は一般に層にはならない。

**例 4.3**  $\mathbb{R}^n$  上の前層を各開集合  $U$  に対してその上の  $L^1$  関数を対応させるものとし、自然な関数の制限によって前層の構造を入れる。このとき  $\mathbb{R}^n$  の定数関数 1 は、 $\mathbb{R}^n$  の任意の半径有限な開球に制限すれば、その上で  $L^1$  関数である。しかし 1 自身は  $\mathbb{R}^n$  上の  $L^1$  関数にはなっていない。

即ち、この場合、貼り合わせの原理が成り立たない。

一方、切断が局所的な性質で規定される場合には層になる。

**例 4.4 (構造層)**  $X$  を複素多様体とし、 $\mathcal{O}_X$  を各開集合  $U \subset X$  に対して

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } U \text{ 上正則}\}$$

とおくと、自然な制限準同型に関して層となる。 $\mathcal{O}_X$  を  $X$  の構造層 (*structure sheaf*) という。なぜ  $\mathcal{O}_X$  を構造層というのかは、後に解析空間の理論を学ぶことで了解されるだろう。

このように前層は一般には層にはならないのであるが、任意の前層  $\mathcal{F}$  から層を作ることができる。このことを示すために次の概念を導入しよう。

**定義 4.5 (茎 (Stalk))**  $\mathcal{F}$  を位相空間  $X$  上の前層とする。  $x \in X$  に対して帰納極限

$$\mathcal{F}_x = \lim_{\rightarrow} \mathcal{F}(U)$$

を  $\mathcal{F}$  の  $x$  における茎 (*stalk*) という。

ここで帰納極限の意味をおさらいしておく、 $\mathcal{F}_x$  とは  $x$  を含む開集合  $U$  を全て動かしたときの  $\mathcal{F}(U)$  の直和に同値関係  $\sigma \in \mathcal{F}(U), \sigma' \in \mathcal{F}(U')$  に対し同値関係

$$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow x \in \exists V \subset U \cap U' \quad \text{s.t.} \quad \sigma|_V = \sigma'|_V$$

を入れたものをいう。つまり、 $x$  の十分小さな近傍に制限したとき一致する切断は皆同じものと見なした加群のことである。

さて、 $\mathcal{F}$  を位相空間  $X$  上の前層としよう。  $\mathcal{F}$  から層  $\tilde{\mathcal{F}}$  を次のように構成できる。今  $U$  を  $X$  の開集合とし、任意の開集合  $U$  に対して

$$\sigma : U \rightarrow \sum_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

で、任意の  $x \in U$  に対してある近傍  $W \subset U$  と  $\sigma_W \in \mathcal{F}(W)$  が存在して

$$\sigma(x') = [\sigma_W] \in \mathcal{F}_{x'}$$

が成り立つもの全体を対応させる前層  $\tilde{F}$  を作る。} ここで  $[\sigma_W]$  は  $\mathcal{F}_x$  で  $\sigma_W$  が代表する元を表す。

このとき  $\tilde{F}$  が層となることは、この性質が局所的なものであることからただちに確かめることができる。これを前層  $\mathcal{F}$  の層化 (**sheafication**) と呼ぶ。

## 4.2 層の準同型、層の完全系列

位相空間  $X$  を固定する。  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  を  $X$  上の加群の層とする。このとき 層準同型

$$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

とは、 $X$  の任意の開集合  $U$  に対して加群の準同型

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

が与えられ、制限準同型に関して  $X$  の開集合の組  $(U, V), U \supset V$  と切断  $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  に対して適合性

$$\varphi_V(\sigma|V) = \varphi_U(\sigma)|V$$

が成り立つことである。この適合性条件から、各  $x \in X$  に対して、茎の間の準同型

$$\varphi_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

が誘導される。このとき、 $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  が 単射であるとは全ての  $x \in X$  に関して  $\varphi_x$  が単射になることであり、このとき  $\mathcal{F}$  を ( $\varphi$  に関して)  $\mathcal{G}$  の部分層 (**subsheaf**) であるという。 $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  が 全射であるとは全ての  $x \in X$  に関して  $\varphi_x$  が全射になることである。

一般に、層準同型  $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  が与えられた時、開集合  $U \subset X$  に対して

$$(\text{Ker } \varphi)(U) = \text{Ker } \varphi_U$$

と置くことで、層  $\text{Ker } \varphi$  が得られる。  $\text{Ker } \varphi$  を  $\varphi$  の核 (**kernel**) と呼ぶ。また、

$$(\text{Image } \varphi)(U) = \varphi_U(\mathcal{F}(U))$$

と置くことで前層  $\text{Image } \varphi$  が定義される。  $\text{Image } \varphi$  は一般に層にならないが、その層化をとって、同じ記号  $\text{Image } \varphi$  で表し  $\varphi$  の像と呼ぶ。さらに、層の準同型の列

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_{m-1} \rightarrow \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_{m+1} \rightarrow \cdots$$

が与えられたとき、この列が**完全 (exact)** であるとは茎の準同型の列

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_{m-1,x} \rightarrow \mathcal{F}_{m,x} \rightarrow \mathcal{F}_{m+1,x} \rightarrow \cdots$$

が加群の準同型列として完全であることをいう。このとき一般には開集合  $U \subset X$  に対して

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_{m-1}(U) \rightarrow \mathcal{F}_m(U) \rightarrow \mathcal{F}_{m+1}(U) \rightarrow \cdots$$

は**完全にならない**ことには特に注意を要する。この辺の事情については、直ぐ後にコホモロジーの節で詳述する。

**例 4.6**  $X$  を位相空間とし、 $\mathbf{Z}$  を各開集合  $U \subset X$  に対して  $\mathbf{Z}$  に値を持つ、 $U$  上の局所定数関数 (各連結成分上で定数となる関数) 全体を対応させる層とし同様に  $\mathbf{Q}$  に値を持つ局所定数関数を用いて層  $\mathbf{Q}$  を考える。このとき自然な単射により

$$\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$$

が定義され、 $\mathbf{Z}$  は  $\mathbf{Q}$  の部分層となる。

### 4.3 層の引き戻し、順像

$X, Y$  を位相空間とし、

$$f: X \rightarrow Y$$

を連続写像とする。 $\mathcal{F}$  を  $Y$  上の層とするとき、

$$(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim \{\mathcal{F}(V) \mid U \subset f^{-1}(V)\}$$

とにおいて、 $\mathcal{F}$  の引き戻し (**pull back**) と呼ぶ。但し右辺は、 $U \subset f^{-1}(V)$  となる  $Y$  の開集合  $V$  全体を動かした時の  $\mathcal{F}(V)$  の帰納極限である。即ち、 $\sigma \in \mathcal{F}(V), \sigma' \in \mathcal{F}(V')$  とした時、 $\sigma \sim \sigma'$  を、ある開集合  $W \subset V \cap V'$  で  $U \subset f^{-1}(W)$  となるものが存在し、

$$\sigma|_W = \sigma'|_W$$

が成立することとして、帰納極限を定義する。このとき  $f^{-1}\mathcal{F}$  が層の公理を満たすことは直ちに確かめられる。

また  $f: X \rightarrow Y$  が複素多様体 (又は後述する複素解析空間) の間の正則写像で  $\mathcal{F}$  が  $\mathcal{O}_Y$  加群の層の場合は

$$f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$



とにおいてやはり引き戻し (**pull back**) と呼ぶ。この場合、 $f^*\mathcal{F}$  は  $\mathcal{O}_X$  加群の層になる。 $\mathcal{O}_X$  は  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$  加群であることに注意する。

今度は逆に連続写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $X$  上の層、 $\mathcal{F}$  が与えられたとする。このとき  $Y$  上の層、 $f_*\mathcal{F}$  を  $Y$  の開部分集合  $V$  に対して

$$f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

で定義することができる。 $f_*\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F}$  の**順像 (direct image)** と呼ぶ。

特に  $f: X \rightarrow Y$  が複素多様体 (又は後述する複素解析空間) の間の正則写像で  $\mathcal{F}$  が  $\mathcal{O}_X$  加群の層の場合は  $f_*\mathcal{F}$  は  $\mathcal{O}_Y$  加群の層である。

さらに一般に高次順像も定義できるが、それは後に述べることにする。

#### 4.4 解析的接続層

この節では接続層の概念を導入する。

**定義 4.7**  $X$  を複素多様体  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の  $\mathcal{O}_X$  加群の層とする。 $\mathcal{F}$  が**解析的接続層 (coherent analytic sheaf)** であるとは、

1.  $\mathcal{F}$  は局所有限生成である。即ち  $X$  の各点  $x$  に対して開近傍  $U$  と全射

$$\oplus^q \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

がある正整数  $q$  に対して存在する。

2.  $\sigma_1, \dots, \sigma_q \in \Gamma(U, \mathcal{F})$  に対して

$$0 \rightarrow \mathcal{R}(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \rightarrow \oplus^q \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$$

関係式の層  $\mathcal{R}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$  は局所有限生成である。

収束ベキ級数環はネーター環であったから、茎だけ見れば有限生成は、明らかなのであるが、接続層の価値というのは、**生成元が近傍で一斉に取れる**という点にあるのである。

**定理 4.8**  $\mathcal{O}_X$  加群の層の完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

に対して  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  の中の二つが接続層であれば、残りの一つも接続層である。

**定理 4.9** (岡)  $\mathcal{O}_X$  は解析的接続層である。

**証明問題**は局所的なので  $X$  は  $\mathbb{C}^n$  の原点の近傍としてよい。 $n$  に関する帰納法により証明する。 $n=0$  のときは自明。今  $n$  について証明されたとして  $n+1$  の場合を証明しよう。

この場合、局所有限性は自明なので、1次関係式の層が局所有限生成であることを証明すればよい。今

$$f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$$

をとる。最後の変数を  $w$  として  $\mathbb{C}^{n+1}$  の座標を  $(z, w)$ ,  $z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}$  のように表す。 $\{f_j\}$  に  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$  の単元を掛けたり、割ったりすることで1次関係式の層は変わらないから、始めから  $f_1, \dots, f_p$  は特殊擬多項式として一般性を失わない。 $f_1, \dots, f_p$  を  $w$  に関する次数順に並び替えて、始めから  $f_p$  の次数が  $m$  で最大となるようにしておく。

$$(g_k^1, \dots, g_k^p) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1) \text{ 個}}, f_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{(p-k-1) \text{ 個}}, -f_k)$$

とおくと、これは  $\mathcal{R} := \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$  に属する。次に  $\mathcal{R}$  の元で、 $w$  の擬多項式で次数高々  $(m-1)$  の元全体を  $\mathcal{R}^*$  とすると、その元は  $z$  だけの関数の  $mp$  個の関数の組とみなすことができる。従って変数が1つ減ったから、帰納法の過程から、適当に高々次数  $(m-1)$  の擬多項式  $(h_\ell^1, \dots, h_\ell^p) \in \mathcal{R}^* (1 \leq \ell \leq r)$  を選んで  $\mathcal{R}^*$  を原点のある近傍  $U$  で生成できる。

さて、 $(a^1, \dots, a^p) \in \mathcal{R}$  とする。今  $P = (\alpha, \beta)$  を原点の近傍  $U$  の点とし、 $P$  において  $f_p$  を  $w - \beta$  の特殊擬多項式の積に  $f = f' f''$  と  $f'$  は  $P$  で0になる既約因子の積、 $f''$  は  $P$  で単元となるようにする。

$$a^j = f' q^j + u^j (j = 1, \dots, p-1)$$

と割り算を行い

$$u^p = a^p + \left( \sum_{j=1}^{p-1} q^j f_j \right) / f''$$

とおけば  $(u^1, \dots, u^p) \in \mathcal{R}$  であり、さらに  $(u^1 f'', \dots, u^p f'') \in \mathcal{R}^*$  である。実際  $u^p f''$  については  $w$  に関する次数が  $m-1$  を超えないことは明らかであり、

$$-\sum_{j=1}^{p-1} u^j f_j = (u^p f'') f'$$

から  $u^p f''$  の  $w$  に関する次数は  $(m + m' - 1) - m'$  を超えないからである。

よって、 $u^j f'' = \sum b^j h_\ell^j$  となる  $b_j \in \mathcal{O}(U)$  が存在する。そこで、

$$a^j - u^j = (f'')^{-1} \sum_{k=1}^{p-1} q^k g_k^j$$

従って

$$a^j = \sum_{\ell=1}^r b^\ell h_\ell^j + \sum_{k=1}^{p-1} (f'')^{-1} q^k g_k^j$$

となり  $\mathcal{R}$  は有限生成である。□

定理 4.9 により任意の有限階数の局所自由層は解析的接続層である。

**定理 4.10** *Let  $X$  be a compact complex manifold. Then for any coherent sheaf  $\mathcal{F}$ , we have that  $\dim H^q(X, \mathcal{F})$  is finite.*

## 4.5 コホモロジー

$\mathcal{F}$  を位相空間  $X$  上の層とする。

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  を  $X$  の開被覆とする。  $X$ . 簡単のため  $\alpha_0 \cdots \alpha_q \in A$  に対して

$$U_{\alpha_0 \cdots \alpha_q} = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$$

のように書く。

$$\tilde{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{\alpha_0 \cdots \alpha_q \in A} \Gamma(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}, \mathcal{F})$$

とおき  $q$ -チェイン  $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  を

$$\{\sigma_{\alpha_0 \cdots \alpha_q} \in \Gamma(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}, \mathcal{F}) \mid \alpha_0 \cdots \alpha_q \in A, \}$$

でし  $\sigma_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}$  が  $\{\alpha_0 \cdots \alpha_q\}$  の置換に関して対称であるもの、即ち  $S_{q+1}$  を  $\{0, \dots, q\}$  の置換群として  $\tau \in S_{q+1}$  に対して

$$\sigma_{\alpha_{\tau_0} \cdots \alpha_{\tau(q)}} = (\text{sign } \tau) \cdot \sigma_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}$$

が成り立つもの全体の作る  $\tilde{C}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  の部分加群として定義する。。。

余境界作用素 (コバウンダリ作用素)

$$\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

を  $c \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  に対して

$$(\delta c)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}} = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sigma_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{q+1}} \mid U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}},$$

で定義する。ここで  $\hat{\alpha}_i$  は  $\alpha_i$  を省くという意味の記号で、 $(\delta c)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}}$  は  $\delta c$  の  $\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}$  成分、即ち

$$(\delta c)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}} \in \Gamma(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{q+1}}, \mathcal{F})$$

である。このとき次の補題が成り立つ。

補題 4.11

$$\delta^2 = 0$$

証明

$$(\delta^2 c)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+2}} = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+2}} | U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+2}} + \sum_{j < i} (-1)^{i+j+1} \sigma_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{q+2}} | U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+2}}$$

より

$$\delta^2 c = 0$$

を得る。

さて

$$Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Ker}\{\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}$$

とおき層  $\mathcal{F}$  の開被覆  $\mathcal{U}$  に関する  $q$ -コサイクルという。また

$$B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \delta C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

とおき層  $\mathcal{F}$  の開被覆  $\mathcal{U}$  に関する  $q$ -コバウンダリという。補題 4.11 より

$$B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

である。 $\mathcal{F}$  の開被覆  $\mathcal{U}$  に関する  $q$  次チェックコホモロジーを

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

で定義する。しかし、 $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  は一般には  $\mathcal{U}$  に依存する。そこで、開被覆の選び方に依らない定義を工夫しよう。

**定義 4.12**  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  を位相空間  $X$  の開被覆とする。 $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{U}$  の細分 (refinement) であるとは  $\mathcal{V}$  の任意の元  $V_\gamma (\gamma \in \Gamma)$  に対して  $\mathcal{U}$  の元  $U_{\alpha(\gamma)}$  が存在して

$$V_\gamma \subset U_{\alpha(\gamma)}$$

が成り立つことである。

添え字の間の対応  $\gamma \mapsto \alpha(\gamma)$  により準同型

$$h_{\mathcal{U}\mathcal{V}}^* : H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

が定義される。即ち

$$c \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

に対して

$$h_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(c)_{\gamma_0, \dots, \gamma_q} = (c)_{\alpha(\gamma_0), \dots, \alpha(\gamma_q)}$$

と定義すれば、これから  $h_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}^*$  が自然に誘導される。この準同型は実は添え字の対応の選び方に依存しない。実際、別の対応  $\alpha' : \Gamma \rightarrow A$  で

$$V_\gamma \subset U_{\alpha'(\gamma)} (\gamma \in \Gamma)$$

となるものが与えられたとすると

$$H : Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

を

$$H(c)_{\gamma_0, \dots, \gamma_{q-1}} = \sum_{i=0}^{q-1} c_{\alpha(\gamma_0) \dots \alpha(\gamma_i) \alpha'(\gamma_i) \dots \alpha'(\gamma_{q-1})} | V_{\gamma_0 \dots \gamma_{q-1}}$$

で定めると簡単な計算により

$$\delta H + H\delta = h_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} - h'_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$$

が成り立つ。従って  $h_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}^* = (h'_{\mathcal{U}, \mathcal{V}})^*$  が成り立つ。従って細分に関して帰納極限

$$H^*(X, \mathcal{F}) := \lim_{\rightarrow} H(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

をとって  $\mathcal{F}$  の  $X$  上のチェックコホモロジーと呼ぶ。

## 4.6 コホモロジー完全系列

**定理 4.13**  $X$  を位相空間とし、 $X$  上の層の短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

が与えられたとする。このときコホモロジーの長完全列

$$\dots \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

が誘導される。

この定理の証明はダイアグラム追跡によるので、非常に退屈なものであるが証明しておく。まず列

$$0 \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

を考えると

#### 例 4.14 指数列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

に対して、長完全列

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow$$

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

が得られる。

## 5 解析空間

今まで、複素多様体を扱って来た。これらは全て局所的には全て複素ユークリッド空間の開集合と双正則同値であって、局所的には何らの違いも見出せない。

しかし、多くの場合、複素多様体の大域理論を構築するには、複素多様体のみを扱っていたのでは不十分であり、特異点を持つ空間を考える必要がある。この節ではそのような特異点を持つような空間、即ち解析空間の理論を紹介する。

### 5.1 解析的集合

複素多様体とは局所モデルを  $\mathbb{C}^n$  の開部分集合にとって得られた幾何学的対象であった。  $\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域としよう。  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$  に対して、

$$V := \{z \in \Omega \mid f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

を考える。  $\mathcal{I}_V = (f_1, \dots, f_k)$  を  $f_1, \dots, f_k$  で生成される  $\mathcal{O}_\Omega$  のイデアル層とする。即ち  $\Omega$  の開集合  $U$  に対して

$$\mathcal{I}_V(U) = \mathcal{O}_\Omega(U)f_1 + \dots + \mathcal{O}_\Omega(U)f_k$$

で与えられる層である。  $\mathcal{I}_V$  は  $\mathcal{O}_\Omega$  の部分層なので商層

$$\mathcal{O}_V := \mathcal{O}_\Omega / \mathcal{I}_V$$

が定義される。  $\mathcal{O}_V$  は環の層でその台は  $V$  と一致する。そこで  $\mathcal{O}_V$  は  $V$  上の層とみなすことにしよう。集合  $V$  と  $\mathcal{O}_V$  の組  $(V, \mathcal{O}_V)$  を考えて**解析的集合 (analytic set)** という。

この解析的集合をモデルにして考えた空間を解析空間というのである。

## 5.2 解析空間

**定義 5.1** (局所環付き空間) 位相空間  $X$  とその上の環の層  $\mathcal{R}$  の組  $(X, \mathcal{R})$  が局所環付き空間 (*local ringed space*) であるとは、任意の  $x \in X$  に対して茎  $\mathcal{R}_x$  が局所環であるものをいう。

局所環付き空間  $(X, \mathcal{R}), (X', \mathcal{R}')$  が同値であるとはある位相同型  $f: X \rightarrow X'$  と層の同型  $f^{-1}\mathcal{R}' \simeq \mathcal{R}$  が存在することをいう。

さて、いよいよ解析空間の定義を与えよう。

**定義 5.2** (解析空間)  $(X, \mathcal{O}_X)$  が解析空間 (**analytic space**) であるとは、 $(X, \mathcal{O}_X)$  が局所環付き空間として、局所的に解析的集合と同値になることである。即ち、任意の点  $x \in X$  に対して、ある近傍  $U$  と解析的集合  $(V, \mathcal{O}_V)$  が存在して、局所環付き空間の同型

$$\varphi: (U, \mathcal{O}_X|_U) \rightarrow (V, \mathcal{O}_V)$$

が存在することである。

この定義から複素多様体は解析的集合の一種である。

次の例から、解析空間の概念は複素多様体の概念より、細かいことが分かる。

**例 5.3**  $\mathbb{C}^2$  の標準座標を  $(z_1, z_2)$  とする。このとき  $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = 0\}$  とおく。さて  $\mathbb{C}^2$  上の  $z_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{C}^2)$  で生成される  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$  のイデアル層を  $\mathcal{I}$ 、同様に  $z_2^2$  で生成される  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$  イデアル層を  $\mathcal{I}^2$  とおく。このとき解析空間  $V := (V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/\mathcal{I})$  と  $V' = (V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/\mathcal{I}^2)$  は集合としては同じであるが、解析空間としては同値にならない。

なぜなら、前者においては、任意の  $x \in V$  における茎  $\mathcal{O}_{V,x}$  はべき零元をもたないが、後者においては  $\mathcal{O}_{V',x}$  はべき零元  $z_2$  を含むからである。

**定義 5.4**  $(X, \mathcal{O}_X)$  を解析空間とする。  $x \in X$  が**非特異点**であるとは、局所環  $\mathcal{O}_{X,x}$  が正則局所環 (*regular local ring*) であることをいう。

$(X, \mathcal{O}_X)$  を解析空間とする。  $\mathcal{O}_{X,x}$  の極大イデアルを  $\mathfrak{m}_x$  で表すとき、ベクトル空間  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  を考え、その双対空間 (即ち  $\mathbb{C}$  への線形写像全体)

$$TX_x := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$$

を  $x$  における  $X$  の**ザリスキ接空間**と呼ぶ。簡単に分かるように  $X$  が複素多様体であれば、ザリスキ接空間は各点で  $X$  の正則接空間と同じもので  $\dim TX_x = \dim X$  となる。

**定理 5.5** 局所環  $(R, \mathfrak{m})$  が正則局所環となるための必要十分条件は

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$$

が成り立つことである。ただし  $\dim R$  は  $R$  のクルル次元を表す。

$(X, \mathcal{O}_X)$  が  $x$  で非特異であるとする。このとき  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ , ( $n = \dim X$ ) が  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  を生成するよう選ぶ。このような  $\{x_1, \dots, x_n\}$  を  $x$  における正則パラメータ系と呼ぶ。

### 例 5.6

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 - x^3 = 0\}$$

とし、 $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2 - x^3)$  とおく。このとき

$$d(y^2 - x^3) = 2ydy + 3x^2dx$$

であるから  $(X, \mathcal{O}_X)$  の特異点は  $O = (0, 0)$  である。

## 5.3 高次順像、Grauert の定理

$f: X \rightarrow Y$  を解析空間の間の正則な固有写像 (proper mapping) とする。ここで固有写像とは、 $Y$  の任意のコンパクト部分集合の  $f$  による逆像が、 $X$  のコンパクト部分集合になるような写像のことである。

**例 5.7**  $f: X \rightarrow Y$  をコンパクト解析空間  $X$  から解析空間  $Y$  への正則写像とすると、 $f$  は固有写像である。

**例 5.8**  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  を解析空間の被覆写像で、 $x \in X$  に対して  $\pi^{-1}(x)$  は無限集合であるとする。このとき  $\pi$  は固有写像ではない。

さて固有正則写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $X$  上の層  $\mathcal{F}$  が与えられた時、 $Y$  の開集合  $U$  に対して、 $H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$  を対応させる対応

$$U \mapsto H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$$

は、自然に前層の構造を持つ。この前層の層化を  $R^q f_* \mathcal{F}$  で表し  $\mathcal{F}$  の  $q$  次順像 ( $q$ -th direct image) と呼ぶ。

このとき次の定理が成り立つ。証明は省略する。

**定理 5.9 (Grauert)**  $f: X \rightarrow Y$  を解析空間の間の固有正則写像とし、 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の  $\mathcal{O}_X$  加群の接続層とする。このとき  $R^q f_* \mathcal{F}$  は全ての  $q$  に対して、 $Y$  上の  $\mathcal{O}_Y$  加群の接続層になる。

この定理から分かるように固有正則写像の下で、接続性は保存されるのである。

この定理の特別な場合として次が得られる。

**定理 5.10**  $X$  をコンパクト解析空間、 $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{O}_X$  加群の接続層とすると  $H^q(X, \mathcal{F})$  は有限次元複素ベクトル空間になる。



## 6 ドルボー複体と層係数コホモロジー

層係数チェックコホモロジーの構成を前節で行なったが、簡単に計算できるものではない。そこで、複素多様体論では、層係数のコホモロジーを微分形式の  $\bar{\partial}$  コホモロジーの形に表現することを考える。このことにより、調和形式論への道が開かれる。

### 6.1 細層

$X$  をパラコンパクト位相空間とする。ここでパラコンパクト位相空間とは任意の開被覆から局所有限な部分開被覆を抽出できるような位相空間であった。

**定義 6.1** 層  $\mathcal{F}$  が細層 (fine sheaf) であるとは、任意の局所有限な開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  に対して、層準同型の族

$$\phi_\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

で

$$\text{Supp } \phi_\alpha \subset\subset U_\alpha$$

及び

$$\sum \phi_\alpha = 1$$

を満たすものが存在することをいう。

パラコンパクト可微分多様体では、任意の局所有限な開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  に対して、1 の分解  $\{\phi_\alpha\}$  が存在した。即ち、

1.  $\phi_\alpha \in C^\infty(M)$ ,
2.  $\text{Supp } \phi_\alpha \subset\subset U_\alpha$ ,
3.  $0 \leq \phi_\alpha \leq 1$ ,
4.  $\sum_\alpha \phi_\alpha \equiv 1$

が成り立つものがある。1 の分解の存在から次の例が得られる。

**例 6.2**  $M$  をパラコンパクト可微分多様体とする。このとき  $M$  上の  $C^\infty$  関数の芽の層、 $\mathcal{A}^0$  は細層である。

このように細層は1の分解をモデルにしているので、特異点のある空間などでは、多少扱いが難しくなる欠点がある。しかし次の命題が成り立つ。

**命題 6.3**  $\mathcal{F}$  をパラコンパクト位相空間  $X$  上の細層とする。このとき

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0$$

が全ての  $q \geq 1$  について成り立つ。

証明.  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  を  $X$  の局所有限な開被覆とする.  $c \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  に対して

$$(\tilde{c})_{\alpha_1 \dots \alpha_q} := \sum_{\alpha} \phi_\alpha \sigma_{\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_q} \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

とおく.  $\delta c = 0$  を使うと

$$(\delta \tilde{c})_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = \sum (-1)^i \tilde{c}_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_q} = \left( \sum \phi_\alpha \right) c_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = c_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$$

が得られる.  $X$  はパラコンパクトなので, 任意の開被覆は局所有限な細分を持つ. 従って  $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$  が全ての  $q \geq 1$  について成り立つ.  $\square$

## 6.2 正則ベクトル束

定義 6.4  $X$  を可微分多様体とする.

$$\pi : E \longrightarrow X$$

が複素ベクトル束であるとは, 次の条件を満たすことである.

1.  $E$  は可微分多様体であり,  $\pi$  は可微分写像.
2.  $X$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  が存在し, **局所自明化**と呼ばれる可微分同相写像

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$$

で  $\pi \circ \Phi_\alpha = 1_{U_\alpha}$  を満たすものが定められ,

3.  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  に対し

$$\Phi_{\alpha\beta} := \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r$$

は可微分写像

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

を用いて

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$$

と書ける.

上の定義において  $r$  を  $E$  の**階数 (rank)** と言い

$$\text{rank } E = r$$

と書く. また定義 6.4 の  $\{g_{\alpha\beta}\}$  を  $E$  の  $\mathcal{U}$  に関する**変換関数系**と呼ぶ. 変換関数系は**コサイクル条件** :

$$g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) \cdot g_{\gamma\alpha}(x) = 1_r (x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$$

が成り立つ。ここで  $1_r$  は  $r$  次単位行列である。

逆に、開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  と可微分写像の族  $\{g_{\alpha\beta}\}, g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$  が与えられ、コサイクル条件

$$g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) \cdot g_{\gamma\alpha}(x) = 1_r(x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$$

が成り立っているとする。このとき

$$\cup U_\alpha \times \mathbb{C}^r$$

に同値関係を  $(x_\alpha, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^r, (x_\beta, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{C}^r$

$$(x_\alpha, v_\alpha) \sim (x_\beta, v_\beta)$$

を

$$x_\alpha = x_\beta, v_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot v_\beta$$

で定義する。このとき  $E = \cup U_\alpha \times \mathbb{C}^r / \sim$  は自然に可微分多様体の構造を持ち、自然な射影  $\pi : E \rightarrow X$  を

$$\pi([(x_\alpha, v_\alpha)]) = x_\alpha$$

で定義すると可微分複素ベクトル束になることは容易に確かめられる。但し  $[(x_\alpha, v_\alpha)]$  は  $(x_\alpha, v_\alpha)$  が代表する  $E$  の点を表す。

$$\pi : E \rightarrow X$$

を正則ベクトル束とするとき

$$E_x := \pi^{-1}(x)$$

とおくと  $\text{rank } E$  次元の複素ベクトル空間である。  $E_x$  を  $E$  の  $x \in X$  上の  $E$  のファイバー (fiber) と呼ぶ。  $E$  は全ての  $x \in X$  についてファイバーを集めたものと考えることができる。

今  $X$  が複素多様体で  $\{g_{\alpha\beta}\}$  において

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

が正則写像であるとき、  $\pi : E \rightarrow X$  を正則ベクトル束という。

さて、  $\pi : E \rightarrow X$  を可微分複素ベクトル束とするとき  $C^\infty$  写

$$\sigma : X \rightarrow E$$

で  $\pi \circ \sigma = 1_X$  を満たすものを  $E$  の  $C^\infty$  切断 ( $C^\infty$  section) という。  $\sigma$  は、開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  に関する局所自明化をとり、  $\{g_{\alpha\beta}\}$  をその自明化

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r \quad (\alpha \in A)$$

に関する、変換関数系とすると  $\sigma \in C^\infty(X, E)$  は、ベクトル値  $C^\infty$  関数

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^r$$

の族  $\{\sigma_\alpha\}$  で、各  $U_\alpha \cap U_\beta$  上で

$$\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \sigma_\beta$$

を満たすものと

$$\Phi_\alpha \circ \sigma(x) = (x, \sigma_\alpha(x)) \quad (\alpha \in A)$$

により同一視される。

$X$  上の  $E$  の  $C^\infty$  切断全体を  $C^\infty(X, E)$  で表すと、 $C^\infty(X, E)$  は  $C^\infty(X)$  加群の構造を持つ。即ち  $\sigma, \sigma' \in C^\infty(X, E)$  に対し  $\sigma + \sigma' \in C^\infty(X, E)$  が定義され、また  $f \in C^\infty(X)$  に対して  $f \cdot \sigma \in C^\infty(X, E)$  が定義される。これは変換関数系が線形群への写像であることから容易に確かめられる。

同様に  $\pi : E \longrightarrow X$  が正則ベクトル束であれば、 $E$  の正則切断の空間  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(E))$  が自然に定義され、 $\mathcal{O}_X(X)$  加群の構造を持つことが分かる。 $X$  の開集合  $U$  に対して、 $E$  上の正則切断の全体を  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(E))$  と書く。これから  $E$  の正則切断の芽の層  $\mathcal{O}_X(E)$  を

$$\mathcal{O}_X(E)(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_X(E))$$

で定める。

$E, F$  を複素多様体上の複素ベクトル束とすると、直和  $E \oplus F$ 、テンソル積  $E \otimes F$ 、外積  $\wedge^p E$  などが自然に定義される。

### 6.3 局所自由層、因子と可逆層

**定義 6.5**  $X$  を複素多様体、 $\mathcal{O}_X$  をその構造層とする。 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の  $\mathcal{O}_X$  加群の層とする。即ち  $U$  を  $X$  の開集合とすると  $\mathcal{F}(U)$  は  $\mathcal{O}_X(U)$  可群であるとする。

$\mathcal{E}$  が局所自由層 (locally free sheaf) であるとは  $X$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  で、ある正整数  $r$  に対して

$$\mathcal{E}|_{U_\alpha} \simeq (\mathcal{O}_X|_{U_\alpha})^{\oplus r}$$

が成り立つことをいう。 $r$  を  $\mathcal{E}$  の階数 (rank) と言い  $\text{rank } \mathcal{E} = r$  と書く。階数 1 の局所自由層を可逆層 (invertible sheaf) という。

$\mathcal{E}$  を複素多様体上の局所自由層とすると、 $\mathcal{E}$  は  $X$  上のベクトル束  $E$  と同一視される。

実際  $X$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  で、局所同型

$$\Phi_\alpha : \mathcal{E} | U_\alpha \longrightarrow (\mathcal{O}_X | U_\alpha)^{\oplus r}$$

が成り立つものをとると、

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : \mathcal{O}_X | U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathcal{O}_X | U_\alpha \cap U_\beta$$

は自然に正則写像

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

と同一視される。定義から  $\{g_{\alpha\beta}\}$  は、コサイクル条件を満たすのでこれから正則ベクトル束  $E$  が自然に定義される。

逆に  $X$  上の正則ベクトル束  $E$  が与えられれば、

$$\mathcal{E} := \mathcal{O}_X(E)$$

と置けば、 $\mathcal{E}$  は局所自由層である。

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$  を  $X$  上の局所自由層とするとき

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}(U) := \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U)$$

で定義される前層に付随する層を  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$  として、局所自由層のテンソル積が定義される。

$X$  上の可逆層の同型類は  $\mathcal{O}_X$  上のテンソル積についてアーベル群をなす。

この群を  $X$  のピカル群 (**Picard group**) と呼ぶ。ピカル群は

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

と同一視される。実際、可逆層  $\mathcal{L}$  に対して  $X$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  と、局所同型

$$\phi_\alpha : \mathcal{L} | U_\alpha \simeq \mathcal{O}_X | U_\alpha$$

が存在するが、各  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  上で同型

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \mathcal{O}_X | U_\alpha \cap U_\beta \simeq \mathcal{O}_X | U_\alpha \cap U_\beta$$

が得られる。各  $\phi_{\alpha\beta}$  は  $\mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$  の元と自然に同一視され (1 の  $\phi_{\alpha\beta}$  による像と同一視すればよい)、コサイクル条件

$$\phi_{\alpha\beta} \cdot \phi_{\beta\gamma} \cdot \phi_{\gamma\alpha} = 1$$

が各  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  の上で成り立つ。即ち  $\{\phi_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$  である。この  $\{\phi_{\alpha\beta}\}$  を  $\mathcal{L}$  の変換関数系 (**transition functions**) と呼ぶ。従って、可逆層  $\mathcal{L}$  に対して  $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$  の元を対応させることができる。

一方、 $X$  上の2つの可逆層  $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$  に対して十分細かい開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  をとると、局所同型

$$\phi_\alpha : \mathcal{L}|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_\alpha},$$

$$\phi'_\alpha : \mathcal{L}'|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$$

が存在するが、このとき  $f_\alpha := \phi_\alpha \circ (\phi'_\alpha)^{-1}$  とおくと  $f_\alpha$  は  $\mathcal{O}_X^*(U_\alpha)$  の元と同一視される。このとき  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{L}'$  の変換関数系の間に

$$\phi_{\alpha\beta} = f_\alpha \cdot \phi_{\alpha\beta} \cdot f_\beta^{-1}$$

が成り立つ。

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}).$$

正則直線束  $L$  に対して 1-st Chern class  $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$  by

$$[L] \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}).$$

$X$  がリーマン面すなわち 1 次元コンパクト複素多様体の場合は自然な向き付けにより

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \sim \mathbb{Z}$$

が成り立つので

$$c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

は整数と同一視される。この数を  $\deg L$  と書き、 $L$  の次数と呼ぶ。 $L$  の次数は 0-切断と  $L$  の  $C^\infty$  大域切断との交叉数と同一視される。

典型的な可逆層の例は次のように与えられる。

**定義 6.6**  $X$  を複素多様体とする。 $D = \sum_{i=1}^m a_i D_i$  が (カルチエ) 因子であるとは

1.  $D_i$  は  $X$  の余次元 1 の部分解析空間。
2.  $a_i \in \mathbb{Z}$

が成り立つことをいう。即ち、余次元 1 の部分解析空間の整数係数の有限形式和を因子という。 $D = \sum_{i=1}^m a_i D_i$  が有効 (effective) であるとは、全ての  $a_i$  が  $a_i \geq 0$  を満たすことをいう。 $X$  上の因子全体は形式和に関して可換群をなす。この群を  $\text{Div}(X)$  で表し、 $X$  の因子群 (divisor group) と言う。

$D$  を複素多様体上の有効因子  $X$  とする。定義から  $X$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  が存在して各  $\alpha$  で

$$D \cap U_\alpha = (f_\alpha)$$

が成り立つような  $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$  が存在するようにできる。ここで  $(f_\alpha)$  は正則関数  $f_\alpha$  の因子を表す。

$$f_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta \in \mathcal{O}_X(U_{\alpha\beta})$$

とおくと  $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$  が成り立つ  $D$  に対応する可逆層を  $\mathcal{O}_X(D)$  で表す。このとき  $\{f_\alpha\}$  は  $X$  上の  $\mathcal{O}_X(D)$  の正則切断を定める。 実際

$$f_\alpha = \left(\frac{f_\alpha}{f_\beta}\right) \cdot f_\beta$$

が各  $U_\alpha \cap U_\beta$  で成り立つ。

有効でない因子  $D$  は有効因子  $D_1, D_2$  を使って

$$D = D_1 - D_2$$

$$\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X(D_1) \otimes (\mathcal{O}_X(D_2))^{-1}$$

と置くと可逆層に対応させることができる。

## 6.4 複素多様体上の微分形式

$X$  を  $n$  次元複素多様体とし、 $T^*X$  を  $X$  の正則余接束とする。 $T^*X$  は階数  $n$  の正則ベクトル束である。

$$\wedge^p T^*X \otimes \wedge^q T^*X$$

## 6.5 ドルボアの補題

$X$  を複素多様体  $\mathcal{A}^{p,q}$  を  $X$  上の  $C^\infty(p, q)$  形式の芽の層とする。このとき

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}$$

を

$$\bar{\partial} \left( \sum_{|I|=p, |J|=q} a_{I\bar{J}} dz^I \wedge d\bar{z}^J \right) = \sum_{|I|=p, |J|=q} \bar{\partial} a_{I\bar{J}} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

で定義する。ここで

$$\bar{\partial} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

である。同様に

$$\partial : \mathcal{A}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1,q}$$

を定義する。

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

であるから

$$d^2 = \partial^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}^2 = 0$$

が成り立つ。タイプを比較して

$$\partial^2 = 0, \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial, \bar{\partial}^2 = 0$$

が成り立つ。

**定理 6.7** (ドルボー (Dolbeault) の補題)  $n = \dim X$  とすると

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}^{0,0} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{A}^{0,n} \rightarrow 0$$

は完全である。

**証明** 定理は局所的なので、始めから  $\Delta^n$  を  $\mathbb{C}^n$  の上で証明すればよい。  $D' \subset \subset \Delta^n$  を  $O$  の近傍とする。  $f$  を  $A^{p,q}(\Delta^n)$  を  $\bar{\partial}f = 0$  となる  $(p, q)$  形式とする。  $f$  が  $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$  を含まないとして  $k$  に関する帰納法により証明する。

$k = 0$  の場合は  $f = 0$  なので証明することはない。  $k - 1$  まで証明できたとして  $k$  の場合を証明しよう。  $f$  は  $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$  を含まないとし、

$$f = d\bar{z}_k \wedge g + h$$

と書く。 但し  $g$  及び  $h$  は  $d\bar{z}_k, \dots, d\bar{z}_n$  を含まないとする。

$$g = \sum_{I,J} g_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

とおくと

$$\frac{\partial g_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

が  $j > k$  について成り立つ。

$$\frac{\partial G_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} = g_{IJ}$$

の  $C^\infty$  解  $G_{IJ}$  をとる。 実際

$$G_{IJ} = (2\pi i)^{-1} \int \int (\tau - z_k)^{-1} \psi(\tau) g_{IJ}(z_1, \dots, z_{k-1}, \tau, z_{k+1}, \dots, z_n) d\tau \wedge d\bar{\tau},$$



とおけばよい。ここで  $\psi \in C_0^\infty(\Delta^n)$  は  $D'$  で恒等的に 1 となる関数である。

$$G = \sum' G_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

とおくと、作り方から

$$f - \bar{\partial}G$$

は  $d\bar{z}_k, \dots, d\bar{z}_n$  を含まない。帰納法の仮定から、証明を終わる。□。

上の定理の証明は局所的なので、定理は全ての  $\mathcal{A}^{p,q}$  について成り立つ。また同時に  $E$  を  $X$  上の正則ベクトル束として  $\mathcal{A}^{p,q}(E) = \mathcal{A}^{p,q} \otimes \mathcal{O}_X(E)$  についても成り立つ。即ち

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{A}^{0,0}(E) \rightarrow \dots \mathcal{A}^{0,n}(E) \rightarrow 0$$

は完全である。

## 6.6 ドルボー同型

**定理 6.8** (ドルボー同型)

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \simeq \text{Ker}\{\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(L) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(L)\} / \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(L)$$

が全ての  $p, q \geq 0$  について成り立つ。

**証明**

$$0 \rightarrow \Omega_X^p(E) \rightarrow \mathcal{A}^{p,0} \rightarrow \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,0} \rightarrow 0$$

はドルボーの補題 (6.7) から完全である。従って  $q \geq 1$  なら

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(X, \mathcal{A}^{p,0}) \rightarrow H^{q-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,0}) \rightarrow H^q(X, \Omega_X^p(E)) \rightarrow H^q(X, \mathcal{A}^{p,0}) \rightarrow \dots$$

は完全である。ここで  $\mathcal{A}^{p,0}$  は細層であるから、定理??により、

$$H^q(X, \mathcal{A}^{p,0}) = 0$$

が成り立つ。従って  $q = 1$  の場合は上の完全列から

$$H^1(X, \Omega_X^p(E)) \simeq H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,0}) / \bar{\partial}H^0(X, \mathcal{A}^{p,0})$$

となり、定理は  $q = 1$  の場合証明された。  $q \geq 2$  の場合は定理??により

$$H^{q-1}(X, \mathcal{A}^{p,0}) = 0$$

となり

$$H^q(X, \Omega_X^p(E)) \simeq H^{q-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}_X^{p,0}(E))$$

となる。一般に  $r \geq 1$  に関してドルボーの補題による層の完全列

$$0 \rightarrow \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,r-1}(E) \rightarrow \mathcal{A}^{p,r} \rightarrow \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,r} \rightarrow 0$$

に付随するコホモロジー長完全列から、

$$H^s(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,r-1}(E)) \simeq H^{s-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,r}(E))$$

が成り立つので、これを繰り返し使うと、

$$H^q(X, \Omega_X^p(E)) \simeq H^{q-1}(X, \bar{\partial}\mathcal{A}_X^{p,0}(E)) \simeq \dots \simeq H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{A}_X^{p,q-1}(E))/\bar{\partial}H^0(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E))$$

が成り立ち、定理は証明された。□

## 7 ドラームコホモロジーと交叉理論

この節ではドラームの定理を証明し、リーマンロッホの定理への微分位相幾何学的な準備を行う。

### 7.1 ドラームコホモロジー

$M$  を  $C^\infty$  多様体。  $A^p(M)$  を  $M$  上の  $C^\infty$ - $p$  形式全体とする。

$$H_{DR}^q(M, \mathbf{R}) := \text{Ker}\{d : A^q(M) \rightarrow A^{q+1}(M)\}/dA^{q-1}(M)$$

をドラームコホモロジーという。  $d^2 = 0$  であるから、これは well defined である。

$f : M \rightarrow N$  を多様体の間の  $C^\infty$  写像とする。

$$df : TM \rightarrow TN$$

は、その双対空間の間の写像

$$f^* : T^*N \rightarrow T^*M$$

を引き起こす。これは線形写像

$$f^* : \wedge^p T^*N \rightarrow \wedge^p T^*M$$

を引き起こす。従ってこれから

$$f^* : A^p(N) \rightarrow A^p(M)$$

が自然に引き起こされる。また

$$d \circ f^* = f^* \circ d$$

が成り立つ。これから準同型写像

$$f^*; H^*(N, \mathbf{R}) \longrightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

が定義される。

さて次の定理は明らかであろう。

**定理 7.1**  $f : M \longrightarrow N$  が微分同相ならば

$$f^* : A^p(N) \longrightarrow A^p(M)$$

は同型

$$f^* : H_{DR}^*(N, \mathbf{R}) \longrightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

を引き起こす。

**例 7.2**

$$H_{DR}^q(S^1, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R} (q = 0, 1)$$

## 7.2 ポアンカレの補題

ドラームコホモロジーと特異コホモロジーのような位相幾何学的コホモロジー理論の関係を明らかにするには次のポアンカレの補題が重要である。

**定理 7.3**  $\Omega$  を原点を含む  $\mathbf{R}^n$  の凸領域とすると、

$$H_{DR}^q(\Omega, \mathbf{R}) = 0 (q \geq 1)$$

である。

**証明**

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

に対して

$$I\omega(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha-1} \left( \int_0^1 t^{p-1} \omega_{i_1 \dots i_p}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_{i_p}$$

と置く。すると

$$d(I\omega) = p \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int_0^1 t^{p-1} \omega_{i_1 \dots i_p}(tx) dt dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$+ \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left( \int_0^1 t^p (D_j \omega_{i_1 \dots i_p})(tx) dt \right) x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_{i_p}$$

一方

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j=1}^n D_j(\omega_{i_1 \dots i_p}) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

なので

$$I(d\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^p (D_j \omega_{i_1 \dots i_p})(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$- \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left( \int_0^1 t^p (D_j \omega_{i_1 \dots i_p})(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge dx_{i_p}$$

2つの式を加えて

$$\begin{aligned} p \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int_0^1 t^{p-1} \omega_{i_1 \dots i_p}(tx) dt dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^p (D_j \omega_{i_1 \dots i_p})(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^p (\omega_{i_1 \dots i_p})(tx)] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ = \omega \end{aligned}$$

となる。よって

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \omega$$

なので所要の結果を得る。□

### 7.3 ドラームの定理

$M$  を可微分多様体、 $\mathcal{A}^p$  を  $M$  上の  $C^\infty p$  形式の芽の層とする。このとき複体

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}^n \rightarrow 0$$

はドラーム複体という。ポアンカレの補題 (定理 7.3) からドラーム複体は定数層  $\mathbb{R}$  の細分解である。従って次の定理が成り立つ。

**定理 7.4** (ドラームの定理)  $M$  を可微分多様体とすると

$$H_{DR}^*(M, \mathbb{R}) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$$

が成り立つ。□

## 7.4 コホモロジーの積構造

$M$  を可微分多様体

$$[\eta] \in H_{DR}^p(M, \mathbb{R}), [\tau] \in H_{DR}^q(M, \mathbb{R})$$

に

## 7.5 カレントのドラームコホモロジー

## 7.6 交叉理論

# 8 リーマンロッホの定理

層係数のコホモロジーを定義したが、一般にこれらのコホモロジーを実際に求めることは難しいことが多い。しかし、コホモロジーの次元の交代和（オイラー標数）なら位相幾何学的方法で求められることが分かっている。これがリーマンロッホの定理と言われるものである。

以外にも難しそうな定理の形に比べて、その証明は難しくない。正しい概念を定めることで、自然に定理が証明できるといった趣である。

## 8.1 オイラー標数

この節では、コホモロジーの次元の交代和について考える。

**補題 8.1** 有限次元ベクトル空間の完全列

$$0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \cdots \rightarrow V_m \rightarrow 0$$

に対して

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \dim V_i = 0$$

が成り立つ。

**証明** 各  $V_i$  は

$$K_i = \text{Ker}\{V_i \rightarrow V_{i+1}\}, I_i = \text{Image}\{V_i \rightarrow V_{i+1}\}$$

とおくと

$$\dim V_i = \dim K_i + \dim I_i$$

である。ところが完全列であることから  $I_i = K_{i+1}$  である。従って

$$\dim V_i = \dim K_i + \dim K_{i+1}$$

従って交代和をとれば 0 である。□

**定義 8.2**  $X$  を位相空間、 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の  $\mathbb{C}$  加群の層とする。このとき  $\mathcal{F}$  のオイラー標数を

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H^q(X, \mathcal{F})$$

で定義する。但し  $h^q(X, \mathcal{F}) = \dim H^q(X, \mathcal{F})$  は全て有限で、有限個の  $q$  を除き全て 0 であると仮定する。この仮定が満たされない場合  $\chi(X, \mathcal{F})$  は定義されないという。

オイラー標数について次の系は基本的である。

**系 8.3** 位相空間  $X$  上の層の短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

に対して  $\chi(X, \mathcal{G}), \chi(X, \mathcal{F}), \chi(X, \mathcal{H})$  が定義されれば

$$\chi(X, \mathcal{G}) = \chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{H})$$

が成り立つ。

**証明**

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

に対するコホモロジーの長完全列

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow$$

$$H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow \cdots$$

を作り、補題 8.1 を適用すればよい。□

次の有限性定理は良く知られている。

**定理 8.4**  $X$  をコンパクト複素多様体とする。 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の解析的連接層とすると  $\dim H^q(X, \mathcal{F})$  は有限である。

**証明** 詳しい証明は面倒なので省くが、次のようにする。まず、 $\mathcal{F}$  が局所自由層の場合ドルボー同型 (定理 6.7) により、対応する正則ベクトル束を  $F$  と書くと、 $q \geq 1$  なら

$$H^q(X, \mathcal{F}) \sim H^0(X, \bar{\partial} \mathcal{A}^{0, q-1}(F)) / \bar{\partial} H^0(X, \mathcal{A}^{q-1}(F))$$

で更に  $F$  にエルミート計量、 $X$  にエルミート計量を入れると

$$H^q(X, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{H}^q$$

と調和形式の空間と同型になる。今、これらの計量に関するソボレフノルム  $\|\cdot\|_k$  を考えると楕円型作用素に関するゴルディング不等式から正の定数  $C_k$  が存在して

$$\|\eta\|_{k+2} \leq C_k \|\eta\|_k$$

が成り立つ。従って、これを繰り返し使うと  $\mathbb{H}^q$  の正規直交系の列は一様収束部分列を持つ。従って  $\mathbb{H}^q$  は有限次元である。

一般の解析的接続層の場合はコンパクト性から有限の長さの局所自由分解を持つので、局所自由の場合の有限性とコホモロジーの長完全列を考えれば、やはり有限次元性が従う。

## 8.2 1次元コンパクト複素多様体上のリーマンロッホの定理

**定義 8.5**  $X$  をコンパクト複素多様体とする。

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

を**不正則数 (irregularity)** と呼び、通常  $q(X)$  で表す。特に  $\dim X = 1$  のとき不正則数のことを  $X$  の**種数 (genus)** と書き、 $q(X)$  の代わりに通常  $g(X)$  で表す。

**定理 8.6** (リーマンロッホの定理)  $X$  をコンパクトリーマン面とし  $L$  を  $X$  上の正則直線束とする。このとき

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(L)) = 1 - g(X) + \deg L$$

が成り立つ。ここで  $g(X)$  は  $X$  の種数である。

**証明.**  $L$  が因子  $D = \sum a_i P_i$  に対応する場合にまず証明する。

$D = 0$  は右側の定義から明らかである。

$SD$ .  $P$  を  $X$  の任意の点とする。完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D+P) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{M}_P \rightarrow 0.$$

を考えるとコホモロジーの長完全列

$$h^q(X, \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{M}_P) \begin{cases} 1 & (q=0) \\ 0 & (q \geq 1) \end{cases}$$

を使うと

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D+P)) = \chi(X, \mathcal{O}_X(D)) + 1$$

が成り立つ。したがって  $D + P$  についても定理は成り立つ。同様に  $D - P$  についても定理が成り立つ。従って、帰納法により  $L$  が因子に対応する場合には証明が終わる。一方  $L$  を任意の直線束とすると

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(L + mP)) = \chi(X, \mathcal{O}_X(L)) + m$$

が全ての整数  $m$  について成り立つ。とくに  $m$  を十分大きくとると

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(L + mP)) > 0$$

とくに  $H^0(X, \mathcal{O}_X(L + mP)) \neq 0$  である。 $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(L + mP))$  を 0 でない正則切断とする。 $D = (\sigma)$  とおくと、 $L + mP = \mathcal{O}_X(D)$  となる。即ち  $L$  は因子  $D - mP$  に付随する直線束である。よって一般の場合の証明ができた。  
□

### 8.3 線形系と有理写像

$X$  をコンパクト複素多様体、 $L$  を  $X$  上の直線束とする。 $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) - \{0\}$  を 0 でない元とする。このとき  $\sigma$  の零因子  $(\sigma)$  は  $\sigma$  に 0 でない定数を掛けても変わらない。そこで

$$|L| = \mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) - \{0\})$$

と定義し  $L$  に付随する完備線形系 (complete linear system) という。

$D = (\sigma), D' = (\sigma')$  を  $|L|$  の元とする。このとき  $\sigma/\sigma'$  は  $X$  上の有理型関数である。従って

$$D = D' + (\sigma/\sigma')$$

が成り立つ。このとき  $D$  と  $D'$  は **線形同値 (linearly equivalent)** であるという。このとき  $L = \mathcal{O}_X(D)$  が成り立つ。 $D$  と  $D'$  が線形同値であるための必要十分条件は  $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(D')$  が成り立つことである。

$H^0(X, \mathcal{O}_X(L))$  の基底  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_N\}$  に対して連比

$$[\sigma_0 : \dots : \sigma_N]$$

は

$$\text{Bs } |L| := \{x \in X \mid \sigma(x) = 0 (\forall \sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(L)))\}.$$

の補集合で定義される。 $\text{Bs } |L|$  を  $|L|$  の**底点集合 (base locus)** という。即ち底点集合とは正則写像の定義に障害となる集合のことである。

正則写像

$$\Phi : X - \text{Bs } |L| \longrightarrow \mathbf{P}^N$$



を

$$\Phi(x) := [\sigma_0(x) : \cdots : \sigma_N(x)].$$

で定義できる。

## 8.4 エルミート接続、曲率

$$\pi : E \longrightarrow X$$

を正則ベクトル束とする。 $C^\infty$  切断  $\sigma : X \longrightarrow E$  が与えられたとき、 $\sigma$  がどのように変化しているのか、その変化率（微分）を求めたいというのは自然な欲求である。ところが、切断の場合には、各ファイバー  $E_x (x \in X)$  での  $\sigma$  の値  $\sigma(x) \in E_x$  は、相異なる  $x$  において比較する方法がアプリアリには与えられていない（関数ならその値の差が意味があるが、この場合はそうは行かない）。そこで、接続という概念を導入することになる。

**定義 8.7 (接続)**  $E$  を可微分多様体  $X$  上の複素ベクトル束とする。

$$D : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(T^*X \otimes E)$$

が  $E$  の接続 (*connection*) であるとは、次が成り立つことをいう。

1.  $D$  は  $\mathbb{C}$ -線形である。
2. 任意の  $f \in C^\infty(X)$  と任意の  $\sigma \in C^\infty(X, E)$ , に対してライプニッツ則:

$$D(f \cdot \sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot D\sigma$$

が成り立つ。

$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$  を  $E$  の局所  $C^\infty$  フレームとする。このとき

$$D\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^r \theta_i^j \mathbf{e}_j,$$

と書ける。ここで  $\{\theta_i^j\}$  局所  $C^\infty$  1 形式である。

行列  $(\theta_i^j)$  を **接続行列 (connection matrix)** といい  $A$  で表す。接続行列  $A$  はフレーム  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$  の選び方に依存する。

**定義 8.8 (エルミート接続)**  $(E, h)$  を複素多様体  $X$  上のエルミート正則ベクトル束とする。 $E$  の接続  $D$  が **エルミート接続 (hermitian connection)** であるとは次が成り立つことである。

1. 任意の正則フレーム  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$  に対して接続行列  $A$  の成分は  $(1, 0)$  形式である。
2.  $Dh$  は恒等的に  $0$  である。即ち

$$d(h(\sigma, \tau)) - h(D\sigma, \tau) - h(\sigma, D\tau) = 0$$

が任意の局所  $C^\infty$ -切断  $\sigma, \tau$  に対して成り立つ。

**注意 8.9**  $h(\sigma, \tau)$  の変動から  $\sigma$  と  $\tau$  から来る変動を引き去れば  $h$  の変動  $Dh$  が出るという仕組みと理解すればよい。

**定理 8.10**  $(E, h)$  を複素多様体  $X$  上のエルミートベクトル束とする。このとき  $(E, h)$  は一意的にエルミート接続  $D$  を持つ。

**証明.** エルミート接続  $D$  が存在したとしよう。  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$  を局所正則フレームとする。すると定義により接続行列  $A = (\theta_i^j)$  は  $(1, 0)$  型である。条件  $Dh = 0$  により

$$\partial h_{ij} = \sum_{k=1}^r \theta_{ik} h_{kj}, \quad \bar{\partial} h_{ij} = \sum_{k=1}^r h_{ik} \bar{\theta}_{jk}$$

が成り立つ。従って

$$\theta_i^j = \sum_{k=1}^r (\partial h_{ik}) h^{kj}$$

が成り立つ。別の言い方をすると

$$A = (\partial h) h^{-1}$$

が成り立つ。以上から  $D$  は存在すれば一意的である。

局所的な存在については、局所正則フレームをとって  $A$  を上のように定義すればよい。大域的な存在については、局所的に定義した接続どうしが、共通部分で一意的に貼り合わさるので自動的である。□

$X$  を可微分多様体とし  $E$  を  $X$  上のベクトル束とする。

$$D : C^\infty(\wedge^p T^* X \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\wedge^{p+1} T^* X \otimes E)$$

を

$$D(\eta \otimes \sigma) = d\eta \otimes \sigma + (-1)^p \eta \wedge D\sigma$$

で定義する。  $D$  をベクトル束  $E$  の接続とするとき

$$D^2 : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(\wedge^2 T^* X \otimes E)$$

は  $C^\infty(X, \text{End}(E) \otimes \wedge^2 T^*X)$  の元である。実際

$$D^2(f\sigma) = D(df \otimes \sigma + fD\sigma) = df \wedge D\sigma - df \wedge D\sigma + fD^2\sigma = fD^2\sigma$$

である。 $D^2$  を  $D$  の曲率形式 (curvature form) と呼ぶ。

接バンドルの接続に関しては、リーマン多様体には標準的な接続が一意的に定まる。

**定義 8.11** (レヴィ-チビタ接続)  $(M, g)$  をリーマン多様体とする。 $TM$  上の接続  $\nabla$  がレヴィ-チビタ (Levi-Civita) 接続であるとは、

$$\nabla g = 0$$

かつ、 $M$  上の可微分ベクトル場  $X, Y$  に関して

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

で定義される捩れテンソルと呼ばれるテンソル場  $T$  が恒等的に  $T \equiv 0$  を満たすことである。

**定理 8.12**  $(M, g)$  をリーマン多様体とすると、 $(M, g)$  は一意的なレヴィ-チビタ接続  $\nabla$  を持つ。

**証明** 問題は局所的なので局所座標  $(x^1, \dots, x^n)$  をとって

$$\sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

と表示する。 $X_i = \partial/\partial x^i (1 \leq i \leq n)$

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$$

と書く。

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

が  $T \equiv 0$  の条件である。 $\nabla g = 0$  から

$$X_k g_{ij} = g_{\ell j} \Gamma_{ki}^\ell + g_{i\ell} \Gamma_{kj}^\ell$$

を得る。よって

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (g^{k\ell} (X_k g_{i\ell} + X_k g_{j\ell} - X_\ell g_{ij}))$$

を得る。

## 8.5 ベクトル束の正值性

$(E, h)$  を正則エルミートベクトル束とすると、 $(E, h)$  の正值性を定義することができる。

**定義 8.13**  $h(\Theta_h(v), \Theta(v))$  が全ての  $v \in E_x$  について正值  $(1, 1)$  形式である時  $(E, h)$  を **Griffith 正** であるという。また、 $h(\Theta(\xi), \xi')$  ( $\xi, \xi' \in TX \otimes E$ ) が  $TX \otimes E$  上の正值二次形式であるとき **中野正 (Nakano positive)** であるという。

$E$  を複素多様体  $X$  上の正則ベクトル束とし  $E^*$  をその双対束とする。また  $\mathbb{P}(E^*)$  を  $E^*$  に付随する射影空間束とする。このとき、 $v^* \in E^*$  に対して、 $K_{v^*}$  を  $\text{Ker } v^*$  で定義するとき、 $v^*$  に対して、商ベクトル空間  $\xi := E_x / K_{v^*}$  を対応させると、 $\mathbb{P}(E^*)$  上の直線束  $\xi$  が定義される。この  $\xi$  を **tautological line bundle** と呼ぶ。

**定義 8.14**  $E$  をコンパクト複素多様体上の正則ベクトル束とする。 $E$  が **アンプル (豊富)** であるとは、**tautological line bundle**  $\xi$  が  $\mathbb{P}(E^*)$  上のアンプル直線束であることである。

小平の定理から次の命題が従う。

**命題 8.15** コンパクト複素多様体上のエルミートベクトル束  $(E, h)$  が **Griffith 正** であれば、 $E$  はアンプルである。

次の問題は自然であるが、現在のところ良く分からない。

**問題 8.16**  $E$  がアンプルであれば、 $E$  は **Griffith 正** なエルミート計量  $h$  を許容するか？

一般に、エルミートベクトル束がアンプルということと、**Griffith 正** であることはかなり密接な関係があると思われるが、中野正であることとは距離があるように思われる。

一方、ベクトル束が中野正であれば、小平—中野消滅定理が成り立つ。このことは、中野正が意味のある定義である所以である。

## 8.6 チャーン類

$X$  をコンパクト複素多様体、 $E$  を  $X$  上の階数  $r$  の正則ベクトル束とする。 $h$  を  $E$  の  $C^\infty$  エルミート計量とする。このとき

$$D : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, T^*X \otimes E)$$

をエルミート接続とする。  $\Theta = D^2$  をその曲率形式とする。 このとき  $\Theta \in \wedge^2 T^*X \otimes \text{End}(E)$  は  $(1,1)$  型形式である。

$$\det(1_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta) = c_0(E, h) + c_1(E, h) + \cdots + c_r(E, h)$$

とおく。 ここで  $1_r$  は  $E$  の恒等写像、  $c_k(E, h)$  は左辺の  $(k, k)$  型成分である。 このときビアンキの等式  $D\Theta = 0$  から

$$dc_k(E, h) = 0$$

である。 また接続のとり方によらないことも2つの接続の差が  $\text{End}(E)$  値1形式であることから分かる。

$$c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{C})$$

を  $X$  のチャーン類という。 実際には

$$c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$$

となることが分かるが、この証明は省略する。

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E)$$

を全チャーン類 (total Chern class) と呼ぶ。

**注意 8.17** チャーン類は *S.S. Chern* によって発見された特性類と呼ばれる、ベクトル束に付随するコホモロジー類である。そのきっかけとなったのが、*Chern* 自身による高次元多様体に対するガウス-ボンネの定理の拡張であった。

チャーン類は次の性質を持つ。

1.  $f: X \rightarrow Y$  を射とするととき  $c(f^*E) = f^*c(E)$  が成り立つ。
2.  $c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F)$ ,
3.  $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$  を複素ベクトル束の完全列とするととき

$$c(F) = c(E) \cdot c(G)$$

が成り立つ。

**例 8.18**  $\mathbb{P}^n$  の全チャーン類  $c(\mathbb{P}^n)$  は

$$c(\mathbb{P}^n) = (1 + H)^{n+1}$$

与えられる。 ここで  $H = c_1(\mathcal{O}(1))$  である。

**証明**  $n$ に関する帰納法で証明する。 $n = 1$ の場合は明らかである。 $n - 1$ まで証明できたとする。 $H$ を $\mathbb{P}^n$ の超平面とすると、ベクトル束の完全列

$$0 \rightarrow TH \rightarrow T\mathbb{P}^n | H \rightarrow N_{H/\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$$

がある。従って、

$$c(T\mathbb{P}^n) | H = c(TH) \cdot c(N_{H/\mathbb{P}^n})$$

である。ここで帰納法の仮定から $c(TH) = (1 + H)^n$ 、また $c(N_{H/\mathbb{P}^n}) = 1 + H$ であるから

$$c(T\mathbb{P}^n) | H = (1 + H)^{n+1} | H$$

が成り立つ。これから $c_n(\mathbb{P}^n) = (n + 1)H^n$ を証明すればよいことが分かる。

□

**例 8.19**  $X$ を $\mathbb{P}^{n+1}$ の次数 $d$ の滑らかな超曲面とする。このとき

$$c(\mathbb{P}^{n+1}) | X = c(X) \cdot c(N_{X/\mathbb{P}^{n+1}})$$

が成り立つ。実際

$$0 \rightarrow TX \rightarrow T\mathbb{P}^{n+1} | X \rightarrow N_{X/\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow 0$$

で、 $c(N_{X/\mathbb{P}^{n+1}}) = 1 + dH$ である。従って

$$c(\mathbb{P}^{n+1}) | X = c(X) \cdot c(N_{X/\mathbb{P}^{n+1}})$$

が成り立つ。これから

$$c(X) = (1 + H)^{n+2}(1 + dH)^{-1} | X$$

となる。特に

$$c_1(X) = -(d - n - 2)H | X$$

が成り立つ。 □

## 8.7 一般次元代数多様体のリーマンロッホの定理

一般次元のコンパクト複素多様体に対してもリーマンロッホの定理と呼ばれるオイラー標数に関する公式が知られている。コンパクト複素多様体 $X$ 上の正則ベクトル束 $E$ に対して $E$ のチャーン類を

$$c(E) = \prod_{i=1}^r (1 + \gamma_i) = c_0(E) + \cdots + c_r(E)$$

と形式的に書いておく。

そのチャーン指標 (Chern character)  $ch(E)$  を

$$ch(E) = \sum_{i=1}^r e^{\gamma_i} = r + c_1(E) + \cdots + \cdots$$

で定義する。また  $E$  のトッド類 (Todd class) を

$$td(E) = \sum_{i=1}^r \frac{\gamma_i}{1 - e^{\gamma_i}}$$

で定義する。

**定理 8.20** (Hirzebruch, Atiyah-Singer)

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(E)) = [ch(E)td(TX)][X]$$

が成り立つ。

証明は省略するが、

## 9 調和積分論

この節では調和積分論について解説する。ドルボー同型から、局所自由層のコホモロジーは、微分形式の  $\bar{\partial}$  コホモロジーと同型になる。つまり、各コホモロジー類はベクトル束に値を持つ微分形式で代表される。しかし、その代表元は無数にあって、定まらない。ここでは、その代表元を決めることを考える。一番自然なのは、一番無駄のない代表元を選ぶことであろう。つまり、コホモロジー類の中で、一番「小さな」微分形式を選ぶということである。

### 9.1 有限次元モデル

$$\cdots V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1} \rightarrow \cdots$$

を有限次元複素ベクトル空間の複体とする。即ち、線形写像

$$d_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}.$$

が定義され、 $d_{i+1} \circ d_i = 0$  を満たすものとする。このとき

$$H^q = \text{Ker } d_q / \text{Im } d_{q-1}$$

をコホモロジーという。さて  $V_i$  はエルミート計量  $h_i$  を持つとしよう。このとき随伴作用素

$$d_i^* : V_i \longrightarrow V_{i-1}$$

が関係式

$$h_{i+1}(d_i v, w) = h_i(v, d_i^* w)$$

で定義される。これは正規直交系に関して  $d_i$  を行列表示した場合、 $d_i^*$  は  $d_i$  の複素随伴行列で定義されることを意味する。ラプラス作用素を

$$\Delta_i := d_i^* d_i + d_{i-1} d_{i-1}^* : V_i \longrightarrow V_i.$$

で定義する。 $\Delta_i$  は自己随伴かつ半正定値である。 実際

$$h_i(\Delta_i v, w) = h_i(v, \Delta_i w)$$

で

$$h_i(\Delta_i v, v) = h_{i+1}(d_i v, d_i v) + h_{i-1}(d_{i-1}^* v, d_{i-1}^* v)$$

が成り立つ。 即ちラプラス作用素は  $V_i$  の正規直交基底に関して、半正定値エルミート行列で表される。調和空間を

$$\mathbf{H}^p := \text{Ker } \Delta_p.$$

で定義する。直交分解

$$V_i = \mathbb{H}^i + (\mathbb{H}^i)^\perp$$

を取ると、

$$\Delta_i |_{(\mathbb{H}^i)^\perp} : (\mathbb{H}^i)^\perp \longrightarrow (\mathbb{H}^i)^\perp$$

は同型写像である。 この逆写像を  $G_i$  と書き、グリーン作用素という。

$$V_i = \mathbb{H}^i + G_i \Delta_i V_i$$

と直交分解されるさらに

$$V_i = \mathbb{H}^i + d_{i-1}(d_{i-1}^* G_i V_i) + d_i^*(d_i G_i V_i)$$

の形に直交分解する。



## 9.2 エルミート計量

$X$  をコンパクト複素多様体  $E$  を  $X$  上の正則ベクトル束とし、 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  を  $X$  の有限被覆で  $E|_{U_\alpha}$  が自明になるものとする。

$$\Phi_\alpha : \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}(E)$$

を局所自明化とする。

$\{e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha\}$  を局所自明化  $\Phi_\alpha$  に付随する局所フレームとする。、i.e.,  $e_i^\alpha$  is a holomorphic section of  $E$  over  $U_\alpha$  corresponds to the vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

このときトランジション関数  $\{G_{\alpha\beta}\}$  が

$$(e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha) = (e_1^\beta, \dots, e_r^\beta) G_{\alpha\beta}$$

で定義される。

$h$  を  $E$  の  $C^\infty$  エルミート計量、即ち  $C^\infty(U_\alpha)$  成分のエルミート行列の系  $h = \{h_\alpha\}$  で

$$G_{\alpha\beta}^t h_\alpha \bar{G}_{\alpha\beta} = h_\beta$$

が  $U_\alpha \cap U_\beta$  で満たすものとする。

このとき  $h$  は  $E$  の各  $x$  におけるファイバー  $E_x$  のエルミート内積を与える。

## 9.3 ホッジ\*作用素

$X$  を次元  $n$  の複素多様体とし、 $g$  を  $X$  のエルミート計量とする。即ち  $g$  は  $TX$  のエルミート計量である。

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{ij} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

を**基本 2 形式**という。  $\omega$  は実形式である。  $\omega^n$  は  $X$  の向き付けを与える。  
 $x \in X$  を一つ固定する。

**ホッジ \* 作用素**

$$* : \wedge^p T_x^* X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \wedge^{2n-p} T_x^* X_{\mathbb{R}}$$

を次のように定義する。  $*$  は  $X$  の実余接空間  $T_x^* X_{\mathbb{R}}$  の正規直交基底  $\{e_1^*, \dots, e_{2n}^*\}$  に対して

$$*e_I^* := \pm e_J^*$$

で定義する。ここで

$$I = (i_1, \dots, i_p), J = (j_1, \dots, j_{2n-p})$$

で

$$\{I, J\} = \{1, \dots, 2n\}$$

と

$$e_I \wedge e_J = \frac{1}{n!} \omega^n$$

が満たされているものとする。  $*$  を線形写像

$$* : \wedge^p T_x^* X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \wedge^q T_x^* X_{\mathbb{R}}$$

に拡張する。また

$$\bar{*} : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{n-p,n-q}(X)$$

をホッジ \* 作用素と複素共役を合成したものとする。

さて、  $A^{p,q}(X)$  に内積

$$(\eta, \eta') = \int_X \eta \bar{*} \eta'$$

を入れる。この内積による  $A^{p,q}(X)$  の完備化をとり、ヒルベルト空間

$$L^2_{(p,q)}(X)$$

が定義される。

$$\partial : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p+1,q}(X), \bar{\partial} : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q+1}(X)$$

の随伴作用素を求めておこう。

$$\int_X \partial \eta \bar{*} \eta' = (-1)^{p+q+1} \int_X \eta \bar{*} \bar{\partial} \eta'$$

であるから、

$$\partial^* = (-1)^{p+q+1} * \bar{\partial}^*$$

を得る。同様に

$$\bar{\partial}^* = (-1)^{p+q+1} * \partial^*$$

も得られる。このように随伴作用素は一階の偏微分作用素である。

## 9.4 ケーラー多様体

ケーラー多様体はシンプレクティック多様体の一種である。 $(X, g)$  をエルミート多様体とする。基本 2 形式  $\omega$  を正則局所座標  $(z^1, \dots, z^n)$  に対して

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

で定義する。

**定義 9.1**  $(X, g)$  をエルミート多様体とする。 $(X, g)$  が **ケーラー多様体 (Kähler manifold)** であるとは基本 2 形式  $\omega$  が  $d$  閉、即ち  $d\omega = 0$  が成り立つことである。

ケーラー多様体の定義である  $d\omega = 0$  の意味を考えよう。

**定理 9.2**  $(X, \omega)$  をケーラー多様体とすると、 $X$  の各点  $x$  の近傍の局所座標  $(z^1, \dots, z^n)$  を

$$g_{i\bar{j}} = \delta_{ij} + O(|z|^2)$$

となるように取れる。

**証明.**  $x$  の近傍での局所座標を  $(z^1, \dots, z^n)$   $x$  で対角化して、局所座標を線形変換してとする。

$$g_{i\bar{j}} = \delta_{ij} + \partial_k g_{i\bar{j}} z_k + \bar{\partial}_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} \bar{z}_{\bar{k}} + O(|z|^2)$$

とテーラー展開する。 $d\omega = 0$  は

$$\partial_k g_{i\bar{j}} = \bar{\partial}_{\bar{k}} g_{i\bar{j}}$$

と同値である。さらに

$$\overline{g_{i\bar{j}}} = g_{j\bar{i}}$$

となるので

$$\overline{\partial_k g_{i\bar{j}}} = \bar{\partial}_k g_{j\bar{i}}$$

が成り立つ。

さて

$$w^j = z^j + \sum b_{k\ell}^j z^k z^\ell$$

と2次座標変換をすることを考える。

今

$$b_{k\ell}^j =$$

とおくと □

エルミート多様体は自然にリーマン多様体と見なせる。このとき正則接バンドルには、自然にエルミート接続が入る。その一方で、

## 9.5 調和積分論

ドルボー同型から

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) \simeq \text{Ker} \{ \bar{\partial} : A^{0,q}(L) \rightarrow A^{0,q+1}(E) \} / \bar{\partial} A^{0,q-1}(E)$$

が全ての  $q \geq 0$  について成立した。ここでは、調和微分形式を用いて右辺の良い代表元を探すを試みる。

$(X, \omega)$  をコンパクトケーラー多様体、 $(E, h)$  を  $X$  上のエルミートベクトル束とする。

$$\Delta' := \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial$$

$$\Delta'' := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

とおく。と  $\Delta', \Delta''$  は  $A^{p,q}(E)$  からそれ自身への線形作用素である。

$$\mathbb{H}^{p,q}(E) := \text{Ker} \{ \Delta'' : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q}(E) \}$$

とおき  $E$  値調和  $(p, q)$  形式の空間と呼ぶ。

**定理 9.3**  $(X, \omega)$  をコンパクトケーラー多様体、 $(E, h)$  を  $X$  上のエルミートベクトル束とする。このとき次が成り立つ。

1.  $\dim \mathbb{H}^{p,q}(E) < \infty$  であり、

$$\mathbb{H}^{p,q}(E) \simeq H^q(X, \Omega_X^p(E))$$

が成り立つ。

2. 直交分解

$$A^{p,q}(E) = \mathbb{H}^{p,q}(E) + \bar{\partial}A^{p,q-1}(E) + \bar{\partial}^*A^{p,q+1}(E)$$

が成り立つ。

## 9.6 Hodge 分解

この節では、 $E$  が自明な直線束の場合の調和積分論を考える。 $(X, \omega)$  をコンパクトケーラー多様体、 $D$  を  $TX$  のエルミート接続とする。

$$\Delta = D'D'^* + D'^*D'$$

$$\Delta'' = D'D'^* + D'^*D'$$

と置く。このとき

### 補題 9.4

$$\Delta' = \Delta^{prime}$$

が成り立つ。

**定理 9.5**  $(X, \omega)$  をコンパクトケーラー多様体、 $(E, h)$  を  $X$  上のエルミートベクトル束とする。このとき次が成り立つ。

1.  $\dim \mathbb{H}^{p,q} < \infty$  であり、

$$\mathbb{H}^{p,q}(E) \simeq H^q(X, \Omega_X^p(E))$$

が成り立つ。

2. 直交分解

$$A^{p,q}(X) = \mathbb{H}^{p,q} + \bar{\partial}A^{p,q-1}(X) + \bar{\partial}^*A^{p,q+1}(X)$$

が成り立つ。

3.  $H^r(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=r} \mathbb{H}^{p,q}$

4.  $\mathbb{H}^{\bar{p},q} = \mathbb{H}^{q,\bar{p}}$ .

この定理から直ちにコンパクトケーラー多様体に関する次の位相的条件が得られる。

**系 9.6**  $X$  をコンパクトケーラー多様体とすると、奇数次のベッチ数は偶数である。

## 10 $L^2$ -評価式とネーデルの消滅定理

### 10.1 ケーラー等式

$(X, \omega)$  をケーラー多様体とし、 $(E, h)$  を  $X$  上のエルミート正則ベクトル束とする。

$$A^{p,q}(X, E) = C^\infty(X, \wedge^p T^* X \otimes \wedge^q T^* \bar{X} \otimes E)$$

とおく

$$L : A^{p,q}(X, E) \longrightarrow A^{p+1,q+1}(X, E)$$

を

$$L\eta := \omega \wedge \eta \quad (\eta \in A^{p,q}(X, E))$$

で定義する。

$$\lambda : A^{p,q}(X, E) \longrightarrow A^{p-1,q-1}(X, E)$$

を  $L$  の形式的随伴作用素とする。即ち

$$(L\eta, \tau) = (\eta, \Lambda\tau) \quad (\eta \in A^{p-1,q-1}(X, E), \tau \in A^{p,q}(X, E))$$

が成り立つように定義する。

### 10.2 Bochner-小平-中野の公式

$(E, h)$  をコンパクトケーラー多様体  $(X, \omega)$  上のエルミート正則ベクトル束とする。 $D$  を  $(E, h)$  のエルミート接続とし、 $\Theta_E = D^2$  をその曲率形式とする。

$$D = D' + D''$$

と  $(1, 0)$  部分  $D'$  と  $(0, 1)$  部分  $D''$  に分解しておく。

**補題 10.1** (ケーラー等式)

$$[D''^*, L] = \sqrt{-1}D, [D'^*, L] = -\sqrt{-1}D''$$

$$[\Lambda, D''] = -\sqrt{-1}D'^*, [\Lambda, D'] = \sqrt{-1}D''^*$$

*Proof.*  $x \in X$  を  $X$  の任意の一点とする。 $(X, \omega)$  はケーラーであるから  $x$  を中心とする正則局所座標  $(z_1, \dots, z_n)$  で

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i + O(|z|^2)$$

が  $x$  の近傍で成り立つものが存在する。 $D', D'', D'^*, D''^*$  は一階の偏微分作用素である、この等式を証明するには  $X$  は  $\mathbb{C}^n$  に標準計量を考えたものとして証明すれば十分である。この場合は直接計算により確かめられる。□

**定理 10.2** (Bochner-小平-中野公式)

$$\Delta'' = \Delta' + [\Theta(E), \Lambda]$$

証明

$$\Delta'' = [D'', D''^*] = -\sqrt{-1}[D'', [\Lambda, D']]$$

ヤコビ等式より

$$[D'', [\Lambda, D']] = [\Lambda, [D', D'']] + [D', [D'', \Lambda]] = [\Lambda, \Theta(E)] + \sqrt{-1}[D', D''^*]$$

□

これから**基本等式**

$$\|D''u\|^2 + \|D''^*u\|^2 \geq \int_X \langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]u, u \rangle dV_\omega.$$

が成り立つ。従って曲率形式  $\Theta_E$  が中野の意味で正值であれば  $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$  が  $E$  値  $(n, q)$  形式上正になる。実際、 $E$  値  $(n, q)$  形式上

$$[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda] = \sqrt{-1}\Theta_E \Lambda$$

であるから中野正值性の定義より、正作用素である。

従って Bochner-小平-中野公式より、 $\eta$  を  $E$  値調和  $(n, q)$  形式とすると、

$$0 = \langle \Delta''\eta, \eta \rangle = \langle \Delta'\eta, \eta \rangle + \langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]\eta, \eta \rangle$$

かつ

$$\langle \Delta'\eta, \eta \rangle \geq 0$$

より

$$\langle [\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]\eta, \eta \rangle \leq 0$$

を得る。 $[\sqrt{-1}\Theta_E, \Lambda]$  は正值であるから、これから  $\eta = 0$  となる。従って  $E$  値調和  $(n, q)$  形式は全て 0 となる。従って定理 9.3 より。次が成り立つ。

**定理 10.3** (小平-中野消滅定理)  $X$  をコンパクトケーラー多様体、 $(E, h)$  を  $X$  上の中野の意味で正な正則エルミートベクトル束とする。

このとき

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X \otimes E)) = 0$$

が全ての  $q \geq 1$  に対して成り立つ。□

特に直線束に関しては、次のように述べられる。

**定理 10.4** (小平消滅定理)  $X$  をコンパクトケーラー多様体。  $L$  を  $X$  上の正の直線束とする。このとき

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0$$

が全ての  $q \geq 1$  について成り立つ。□

### 10.3 弱 1 完備多様体上の $L^2$ -評価

**定義 10.5** *Let  $X$  be a complex manifold.  $X$  is said to be weakly 1-complete, if there exists a smooth plurisubhamonic exhaustion function.*

The important fact is that a weakly 1-complete Kähler manifold  $(X, \omega)$  admits a complete Kähler metric. In fact let  $\psi$  be a smooth plurisubhamonic exhaustion function on  $X$ . Then

$$\omega_\varepsilon := \omega + \varepsilon\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi^2 = \omega + 2\varepsilon(2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi + \sqrt{-1}\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi)$$

is a complete Kähler metric on  $X$ . This implies that letting  $\varepsilon$  tend to 0, the  $L^2$ -existence theorem on  $(X, \omega_\varepsilon)$  implies the  $L^2$ -existence theorem on (possibly incomplete)  $(X, \omega)$ .

**定理 10.6** *Let  $(X, \omega)$  be a weakly 1-complete Kähler manifold. Let  $F$  be a hermitian line bundle and let*

$$\gamma_1(x) \square \dots \square \gamma_n(x)$$

*be the curvature eigenvalue with respect to  $\omega$ . Assume that the curvature  $\Theta_F$  is positive. Then for any form  $f \in L^2(X, \wedge^{n,q}T^*X \otimes F)$  satisfying*

$$\bar{\partial}f = 0$$

*and*

$$\int_X (\gamma_1 + \dots + \gamma_q)^{-1} |f|^2 dV_\omega < \infty,$$

*there exists  $u \in L^2(X, \wedge^{n,q-1}T^*X \otimes F)$  such that*

$$D''u = f$$

*and*

$$\int_X |u|^2 dV_\omega \square \int_X (\gamma_1 + \dots + \gamma_q)^{-1} |f|^2 dV_\omega$$

*hold.*



**Proof.** As above we may assume that  $(X, \omega)$  is a complete Kähler manifold. Let  $x$  be a point on  $X$ . We take a local coordinate  $(z_1, \dots, z_n)$  around  $x$  so that

$$\omega(x) = \sqrt{-1} \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

and

$$\Theta_F(x) = \sqrt{-1} \sum \gamma_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

holds. Let

$$u = \sum u_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K \otimes \mathbf{e}$$

a  $F$ -valued  $(p, q)$ -form. Then we have

$$\begin{aligned} \langle [\Theta_F, \Lambda]u, \rangle &= \sum_{|J|=p, |K|=q} \left( \sum_{j \in J} \gamma_j + \sum_{j \in K} \gamma_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) |u_{JK}|^2 \\ &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_q - \gamma_{n-p+1} - \dots - \gamma_n) |u|^2 \end{aligned}$$

holds. If  $u$  is of type  $(q, n)$ , then we have that

$$\langle [\Theta_F, \Lambda]u, \rangle \geq (\gamma_1 + \dots + \gamma_q) |u|^2$$

This implies that for every  $f \in L^2(X, \wedge^{n,q} T^* X \otimes F)$  such that  $D''f = 0$ ,

$$\int_X (\gamma_1 + \dots + \gamma_q) |f|^2 dV \square \|D''f\|^2 + \|D''^* f\|^2 = \|D''^* f\|^2$$

holds. Let us denote the operator  $[\Theta_F, \Lambda]$  by  $A$ . Then we have that for every  $v \in C_0^\infty(X, \wedge^{n,q} T^* X \otimes F)$

$$|\langle f, v \rangle|^2 \square \left( \int_X \langle A^{-1} f, f \rangle dV_\omega \right) \cdot \|D''^* v\|^2$$

by Schwarz inequality. Then the linear form :

$$D''^* v \rightarrow \langle v, f \rangle$$

is continuous. Hahn-Banach の拡張定理から  $u \in L^2(X, \wedge^{n,q-1} T^* X \otimes F)$  such that

$$\langle v, f \rangle = \langle D''^* v, f \rangle$$

holds for every  $v \in C^\infty(X, \wedge^{n,q} T^* X \otimes F)$ . Hence we have that

$$D''u = f$$

holds in the sense of distribution. **Q.E.D.**

**定理 10.7** Let  $(X, \omega)$  be a weakly 1-complete Kähler manifold of dimension  $n$ . Let  $(L, h)$  be a singular hermitian line bundle on  $X$ . Suppose that

$$\Theta_h \geq \varepsilon \omega$$

holds for some  $\varepsilon > 0$ . Then for every  $f \in L^2(X, \wedge^{n,q} T^* X \otimes L)$  satisfying  $D''f = 0$ , there exists  $u \in L^2(X, \wedge^{n,q-1} T^* X \otimes L)$  such that  $D''u = f$  and

$$\int_X |u|^2 dV_\omega \leq \frac{1}{q\varepsilon} \int_X |f|^2 dV_\omega$$

hold.

**Proof.** By using the standard smoothing of the metric  $h$  by using mollifier, we may construct a solution of the equation as a limit of smooth solutions. **Q.E.D.**

## 10.4 Nadel's vanishing theorem

The following theorem is fundamental in the applications of multiplier ideal sheaves.

**定理 10.8** (Nadel's vanishing theorem [?, p.561]) Let  $(L, h)$  be a singular hermitian line bundle on a compact Kähler manifold  $M$  of dimension  $n$  and let  $\omega$  be a Kähler form on  $M$ . Suppose that  $\Theta_h$  is strictly positive, i.e., there exists a positive constant  $\varepsilon$  such that

$$\Theta_h \geq \varepsilon \omega$$

holds. Then  $\mathcal{I}(h)$  is a coherent sheaf of  $\mathcal{O}_M$  ideal and for every  $q \geq 1$

$$H^q(M, \mathcal{O}_M(K_M + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$$

holds.

**Proof.** We see that the Dolbeault cohomology of  $\{L^2(X, \wedge^{n,q} T^* X \otimes L), D''\}_{q=0}^n$  coincides with the cohomology  $\{H^q(M, \mathcal{O}_M(K_M + L) \otimes \mathcal{I}(h))\}$ , since  $\{L^2(\wedge^{n,q} T^* X \otimes L), D''\}_{q=0}^n$  is a fine resolution of  $\mathcal{O}_M(K_M + L) \otimes \mathcal{I}(h)$  by Theorem 3.5. Then by Theorem 3.5, we obtain the desired vanishing theorem.

Then coherence of  $\mathcal{I}(h)$  follows from the  $L^2$ -estimate and the following theorem.

**定理 10.9** (Artin-Rees) Let  $M$  be a finitely generated module over a Noetherian ring  $R$  and let  $N, N'$  be a submodule of  $M$ . Let  $I$  be an ideal in  $R$ . Then there exists a positive integer  $r$  such that for every  $m \geq r$ ,

$$I^m N \cap N' = I^{m-r} (I^r N \cap N')$$

holds

Now we shall prove the coherence, since the problem is local we may assume that  $M$  is a polydisk  $\Delta^n$  and  $L$  is a trivial line bundle with singular hermitian metric  $e^{-\varphi}$ . Let  $\mathcal{I}_x$  be an ideal of  $\mathcal{O}_x$  generated by  $L^2$ -holomorphic function with respect to  $e^{-\varphi}$  on  $\Delta^n$ . Then apparently

$$\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}(h)_x$$

holds. The coherence of  $\mathcal{I}(h)$  is equivalent to the equality of the above inclusion for every  $x \in \Delta^n$ , since  $\mathcal{O}_x$  is a Noetherian ring. Then by the Artin-Rees theorem, we see that it is sufficient to verify that

$$\mathcal{I}_x + \mathcal{M}_x^m \cap \mathcal{I}(h)_x = \mathcal{I}(h)_x$$

holds for every  $m \geq 1$ , where  $\mathcal{M}_x$  denotes the maximal ideal of  $\mathcal{O}_x$ . Let  $f \in \mathcal{I}(h)_x$ . Let  $V$  be an open neighbourhood of  $x$  such that  $f$  is defined on  $V$ . Let  $\rho \in C_0^\infty(V)$  be a cut off function on  $V$ , i.e.  $\rho \equiv 1$  on a neighbourhood of  $x$  and  $0 \leq \rho \leq 1$  on  $V$ . Then there exists a solution of the  $\bar{\partial}$ -equation :

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial}(\rho \cdot f)$$

with the estimate

$$\int_{\Delta^n} |u|^2 e^{-\varphi+2(n+m)\log|z-x|} d\mu < \infty.$$

Then the holomorphic function  $\rho f - u$  defines a germ  $g$  of  $\mathcal{I}_x$  such that  $g - f \in \mathcal{M}_x^m \cap \mathcal{I}(h)_x$ . This completes the proof. **Q.E.D.**

The Nadel vanishing theorem is very useful and includes many other vanishing theorems as special cases.

**定理 10.10** (川又-Viehweg 消滅定理)  $X$  を滑らかな射影代数多様体  $L$  を数値的に半正 (ネフ) かつビッグな  $X$  上の直線束とする。このとき

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0$$

が全ての  $q \geq 1$  について成り立つ。

**補題 10.11** (小平の補題) *Let  $L$  be a big line bundle on a smooth projective manifold  $X$ . Then there exists an effective  $\mathbf{Q}$ -divisor  $E$  such that  $L - E$  is an ample  $\mathbf{Q}$ -line bundle on  $X$ .*

**Proof.** Let  $H$  be an smooth very ample divisor on  $X$ . Since the kernel of the homomorphism

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mL)) \rightarrow H^0(H, \mathcal{O}_H(mL))$$

is not 0 by the bigness of  $L$ ,

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mL - H)) \neq 0$$

holds for every sufficiently large  $m$ . Let  $E'$  be a member of  $|m_0L - H|$  and set

$$E = \frac{1}{m_0} E'.$$

Then we see that  $L - E$  is ample. **Q.E.D.**

Now we shall prove Theorem 3.3. Let  $E$  be an effective  $\mathbf{Q}$ -divisor on  $X$  such that  $L - E$  is ample. Then since  $L$  is nef and big by Kleinman's criterion for ampleness, for every sufficiently small positive number  $\epsilon$ ,  $L - \epsilon E$  is ample. Let  $a$  be a positive integer such that  $aE$  is an integral divisor. Let  $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(aE))$  be a nonzero global section such that  $(\sigma) = aE$ . Let  $\epsilon$  be a small positive number. Then since  $L - \epsilon E$  is ample, there exists a  $C^\infty$ -hermitian metric  $h_0$  on  $L$  such that

$$h := \frac{h_0}{|\sigma|^{2\epsilon/a}}$$

is a singular hermitian metric with strictly positive curvature.

If we take  $\epsilon$  sufficiently small, we see that

$$\mathcal{I}(h) = \mathcal{O}_X$$

holds. Then by Nadel's vanishing theorem, we see that

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0$$

holds for every  $q \geq 1$ . **Q.E.D.**

## 11 セールの双対定理

**定理 11.1 (Serre duality)** *Let  $X$  be a compact complex manifold and let  $E$  be a holomorphic vector bundle on  $X$ . Then*

$$H^q(X, \mathcal{O}(E)) \simeq (H^{n-q}(X, \mathcal{O}(K_X \otimes E^*)))^*$$

*holds.*

**Proof.** Let us fix hermitian metric  $h_E$  on  $E$  and a hermitian metric  $g$  on  $X$ .

Then  $H^q(X, \mathcal{O}(E))$  is isomorphic to the space of  $E$ -valued harmonic  $(0, q)$ -forms  $\mathbf{H}^{0,q}(E)$ . Then the Hodge star operator

$$* : \mathbf{H}^{0,q}(E) \longrightarrow \mathbf{H}^{n,n-q}(E^*)$$

defines the isomorphism between  $\mathbf{H}^{0,q}(E)$  and  $\mathbf{H}^{n,q}(E^*)$ .  $\square$

## 12 代数曲線、コンパクトリーマン面

$X$  を 1 次元コンパクト複素多様体とする。このとき  $X$  はコンパクトリーマン面と呼ばれる。  $g$  を  $X$  のエルミート計量として

$$\omega = \sqrt{-1}g dz \wedge d\bar{z}$$

とおくと正値  $(1, 1)$  形式である。  $\dim X = 1$  であるから、  $d\omega = 0$  となり  $(X, \omega)$  はケーラー多様体である。 指数列

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow$$

を考えると、ドルボー同型と  $X$  が一次元であることから  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  が成り立つので

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

は全射である。 ドラムコホモロジー類  $[\omega]$  が  $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$  となるようにとると

$$L \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

で  $c_1(L) = \omega$  となるものがとれる。

Let  $\mathcal{L}$  be an invertible sheaf on a complex manifold  $X$ . Let  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  be an open covering of  $X$  such that

$$\mathcal{L}|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$$

Let  $h$  be a  $C^\infty$ -hermitian metric on  $L$ . The first Chern form is given by

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log h.$$

This is because the relation

$$h_\alpha = |\phi_{\alpha\beta}|^{-2} h_\beta$$

implies that

$$\log h_\alpha - \log h_\beta = \log |\phi_{\alpha\beta}|^{-2}$$

Hence we see that

$$-\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log h_\alpha$$

is well defined 2-form on  $X$  which represents  $c_1(L)$ .

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \phi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \phi_{\beta\gamma} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \phi_{\gamma\alpha}$$

is the 2-cocycle in  $Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$  which represents the 1-st Chern class  $c_1(L)$ . Taking  $\partial$  we have

$$\delta\{\partial \log \phi_{\alpha\beta}\} = 0$$

holds. We note that

$$\partial \log |\phi_{\alpha\beta}|^2 = \partial \log h_\alpha - \partial \log h_\beta$$

holds. Hence we have that

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log h_\alpha$$

is well defined 2-form on  $X$  which represents  $c_1(L)$ .

### 13 Compact Riemann surfaces and Projective curves

**定理 13.1** *Let  $X$  be a compact Riemann surface and let  $D$  be a divisor on  $X$  with  $\deg D \geq 3$ . Then  $|K_X + D|$  is very ample.*

**Proof.** Let  $P, Q$  be arbitrary points on  $X$ . Then by Kodaira's vanishing theorem, we see that

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X + D - P - Q)) = 0$$

holds. Hence we have that if  $P \neq Q$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) \rightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P(K_X + D)) \oplus H^0(Q, \mathcal{O}_Q(K_X + D))$$

is surjective. If  $P = Q$ , then we see that  $|K_X + D|$  separates 1-jets. This completes the proof.  $\square$ .

**系 13.2** *Let  $X$  be a compact Riemann surface of genus 0, then  $X$  is isomorphic to  $\mathbf{P}^1$ .*

**系 13.3** *If  $X$  is a compact curve of genus  $\geq 2$ , then  $|3K_X|$  is very ample.*  
 $\square$

### 14 Kähler metric on compact complex curves

**定理 14.1** *Let  $X$  be a compact complex curve of genus  $\geq 2$ . Then  $X$  admits a Kähler metric  $g$  with  $\Theta_g = -g$ .*

**Proof.** Let  $g$  be an arbitrary hermitian metric on  $TX$ . Let  $\omega$  be the associated Kähler form on  $X$ . We shall assume that  $\omega$  is cohomologous to  $2\pi c_1(K_X)$ . Then there exists a  $C^\infty$ -volume form  $\Omega$  such that

$$\omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\Omega.$$

We want to solve the equation

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}) = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$$

on  $X$ . Then we reduce the above equation to

$$\log\frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u)}{\Omega} = u.$$

To solve this equation, we shall consider the parabolic version :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \log\frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u)}{\Omega} - u. X \times [0, T)$$

with the initial value  $u = 0$ , where  $T$  is the maximal existence time for  $C^\infty$ -solution. If we write

$$\tilde{\omega} := \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u,$$

then we have

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \tilde{\Delta}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

holds. Hence we have that there exists a positive constant  $C$  such that

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leq C \cdot e^{-t}$$

holds on  $X$ .

We set

$$f := \omega/\Omega.$$

The equation turns out

$$1 - \Delta u = f \exp\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\right).$$

The right hand side is uniformly bounded. Hence  $\Delta u$  is also uniformly bounded on  $X$ . By Green's formula we see that

$$u = \frac{1}{\text{Vol}(X)}\left(\int_X u dV_g\right) + \int_X G(x, y)\Delta u(y)$$

holds. Hence we see that  $u$  is  $C^1$ -function. Then by using the equation inductively we see that  $u$  is  $C^\infty(X \times [0, T])$ . Hence by the uniform estimate,

we see that  $T = \infty$  holds. And the concavity of  $u$  in time direction, we see that

$$u_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$$

exists and  $C^\infty$  on  $X$  and satisfies the equation

$$\log \frac{(\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_\infty)}{\Omega} = u_\infty.$$

This completes the proof.  $\square$

## 15 ベルグマン核

### 15.1 古典的ベルグマン核

$\Omega$  を  $\mathbb{C}^n$  の有界領域とする。

$$A^2(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid \int_{\Omega} |f|^2 d\mu < \infty\}$$

とおく。ここで  $d\mu$  は  $\mathbb{C}^n$  のルベーグ測度である。 $A^2(\Omega)$  は、内積

$$(f, g) := \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} d\mu$$

に関してヒルベルト空間の構造を持つ。 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$  を  $A^2(\Omega)$  の完備正規直交基底とする。このとき

$$K_\Omega(z, w) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) \bar{f}_i(w)$$

とおき、 $\Omega$  のベルグマン核 (Bergman kernel) という。

**定理 15.1**  $K_\Omega(z, w)$  は定義できる。

**証明**  $z \in \Omega$  に対して線形汎関数

$$e_z : A^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を

$$e_z(f) = f(z)$$

で定義する。このとき  $e_z$  は有界汎関数である。即ち  $C > 0$  が存在して

$$|e_z(f)| \leq C \|f\|$$



が成り立つ。実際  $|f|^2$  は多重劣調和であるから  $B(z, r) \subset\subset \Omega$  となる  $r > 0$  に対して

$$|e_z(f)|^2 \leq \frac{1}{\text{Vol}(B(z, r))} \int_{B(z, r)} |f|^2 d\mu \leq \frac{1}{\text{Vol}(B(z, r))} \|f\|^2$$

が成り立つ。

従って Riesz の表現定理により任意の  $f \in A^2(\Omega)$  に対して

$$e_z(f(w)) = (f(w), K(\bar{z}, w))$$

となる  $w$  の正則関数  $K(\bar{z}, w) \in A^2(\Omega)$  が存在する。

$$K(z, w) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(\bar{w})$$

と展開すると、

$$a_i = f_i(z) = (f_i(w), K(\bar{z}, w))$$

が成り立つ。 即ち

$$K(z, w) = \sum f_i(z) f_i(\bar{w})$$

となり  $K_{\Omega}(z, w)$  の収束が証明された。  $\square$

$$\omega = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log K_{\Omega}(z, z)$$

は、射影埋め込み

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}^{\infty}$$

$$\Phi(z) = [f_1(z) : \cdots : f_m(z) : \cdots]$$

に依る  $\mathbb{P}^{\infty}$  上の Fubini-Study ケーラー形式の引き戻しであるから  $\omega$  は  $\Omega$  上、至るところ正定値の  $C^{\infty}$  ケーラー形式である。 $\omega$  を  $\Omega$  の **ベルグマン計量 (Bergman metric)** という。

$\omega$  は  $\Omega$  の正則自己同型群  $\text{Aut}(\Omega)$  で不変である。実際  $\phi \in \text{Aut}(\Omega)$  とすると

$$\phi^* K_{\Omega}(z, z) = |\det d\phi|^2 K_{\Omega}(z, z)$$

が成り立つので、明らかである。

さて  $K_{\Omega}(z, z)$  を改めて  $K_{\Omega}(z)$

## 15.2 随伴直線束とベルグマン計量

$X$  を  $n$  次元コンパクト複素多様体、 $(L, h)$  を  $X$  上のエルミート直線束とする。このとき  $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L))$  の内積を

$$(\sigma, \sigma') := (\sqrt{-1})^{n^2} \int_X h \cdot \sigma \wedge \bar{\sigma}'$$

で定義する。このとき

## 16 複素多様体の変形

**定義 16.1**  $f : X \rightarrow S$  がコンパクト複素多様体の複素解析族であるとは

1.  $X, S$  は複素多様体で  $f$  は全射正則写像。
2.  $f$  のファイバー  $X_s := f^{-1}(s)$  は全て連結。
3.  $f$  は固有で、微分写像  $df : TX \rightarrow TS$  は  $X$  上至る所極大階数 (即ち、 $\text{rank} df = \dim S$  が成り立つこと) である。

**定理 16.2**  $f : X \rightarrow S$  を複素解析族とする。このとき  $f : X \rightarrow S$  は可微分局所自明である。即ち任意の  $s \in S$  に対して、ある近傍  $U$  が存在して、 $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$  はファイバー空間として  $X_s \times U$  に可微分同相である。

**証明** まず可微分多様体に関する命題であるから  $X, S$  は可微分多様体、 $f$  は極大階数の全射固有写像で、ファイバーは全て連結とする。

まず  $S$  を开区間  $(-1, 1)$  として証明する。

$f$  は固有写像であるから必要なら  $S$  をさらに小さくとして  $X$  の座標近傍系  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  を

$$\varphi_\alpha = (x_\alpha, t_\alpha)$$

$$t_\alpha = f^* t$$

となるようにとれる。さて、 $\mathcal{U}$  に付随する 1 の分解を  $\{\phi_\alpha\}$  とおくと

$$\theta := \sum_\alpha \phi_\alpha \partial / \partial t_\alpha$$

は  $X$  上の  $C^\infty$  ベクトル場を定める。

ここで微分方程式

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \theta(x_\alpha, s_\alpha) x_\alpha$$

を考えると、この解は局所 1 パラメーター変換群  $\{\psi_t\}$  を生成する。

$$\Phi : X_0 \times (-1, 1) \rightarrow X$$

を

$$\Phi(x, t) = \psi_t(x)$$

で与えることができる。従って、 $f: X \rightarrow (-1, 1)$  は可微分局所自明である。□

さて、複素解析族  $f: X \rightarrow \Delta^m$  が与えられたとする。 $\Delta^m$  をさらに小さくとして  $X$  の正則座標近傍系  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  を

$$\varphi_\alpha = (x_\alpha, t_\alpha)$$

$$t_\alpha = f^*t, t = (t^1, \dots, t^m)$$

となるようにとれる。各  $U_\alpha$  上の正則ベクトル場  $\partial/\partial t_\alpha^j$  は  $\partial/\partial t^j$  の持ち上げである。即ち

$$d\pi(\partial/\partial t_\alpha^j) = \partial/\partial t^j$$

が成り立つ。 $U_\alpha \cap U_\beta$  上の正則ベクトル場を

$$\theta_{\alpha\beta}^j := \partial/\partial t_\alpha^j - \partial/\partial t_\beta^j \quad (1 \leq j \leq m)$$

で定義する。

$$d\pi(\theta_{\alpha\beta}^j) = \partial/\partial t^j - \partial/\partial t^j = 0$$

であるから、 $\theta_{\alpha\beta}$  はファイバーに沿った正則ベクトル場即ち

$$\theta_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X(T_{X/S}))$$

である。このとき明らかにコサイクル条件

$$\theta_{\alpha\beta}^j + \theta_{\beta\gamma}^j + \theta_{\gamma\alpha}^j = 0$$

が各  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  で成り立つ。即ち  $\{\theta_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(T_{X/S}))$  が成り立つ。 $\{\theta_{\alpha\beta}^j\}$  のコホモロジー類を

$$\rho(\partial/\partial t^j) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T_{X/S}))$$

と書く。 $\rho(\partial/\partial t^j)$  は持ち上げと  $\mathcal{U}$  の取り方に依存しないことは2つの持ち上げの差が  $T_{X/S}$  の正則切断になることから明らかであろう。

$$\{\theta_{\alpha\beta}^j\} = \delta\{\eta_\alpha\}$$

と  $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(T_{X/S}))$  の元のコバウンダリとして書けるなら、

$$Z^j | U_\alpha := \partial/\partial t_\alpha^j - \eta_\alpha$$

とおくと  $Z_j$  は  $\partial/\partial t^j$  の正則な持ち上げである。従って、この場合、 $X$  は  $t_j$  方向には局所自明である。また

$$\rho_s : TS_s \longrightarrow H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(TX_s))$$

が

$$\rho_s(\partial/\partial t^j) = \{\theta_{\alpha\beta}^j | X_s\}$$

として定義される。

**定義 16.3**

$$\rho_s : TS_s \longrightarrow H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(TX_s))$$

を小平—スペンサー写像、又は複素構造の微分という。

上の考察から

**定理 16.4**

$$f : X \longrightarrow S$$

を複素解析族とする。もし  $\rho_s : TS_s \longrightarrow H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(TX_s))$  が  $s$  に依らず恒等的に 0 写像であれば  $f : X \longrightarrow S$  は複素解析的に局所自明である。

**例 16.5**  $X$  を種数  $g \geq 2$  のコンパクトリーマン面とすると

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X(TX)) = 3g - 3$$

である。

**証明**  $\deg TX = -\deg K_X < 2 - 2g < 0$  なので

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(TX)) = 0$$

リーマン—ロッホの定理から

$$-\dim H^1(X, \mathcal{O}_X(TX)) = 1 - g + (2 - 2g) = 3 - 3g$$

である。□

**定義 16.6** (完備性) 複素解析族  $f : X \rightarrow S$  が  $s_0 \in S$  で完備であるとは、任意の複素解析族  $f' : X' \rightarrow S'$  で  $X_{s_0} \simeq X_{s'_0}$  となるものに対して  $s'_0$  のある近傍  $V$  と  $\phi : V \rightarrow S$  が存在して

$$(f')^{-1}(V) = X \times_{\phi} V$$

が成り立つことである。つまり  $s_0$  の近くの複素構造を  $f : X \rightarrow S$  が全て含むということである。

**定理 16.7**  $X$  を種数  $g \geq 2$  のコンパクトリーマン面とすると  $X$  を含む完備な複素解析族が存在する。

**証明** ドルボー同型から、 $H^1(X, \mathcal{O}_X(TX))$  の元は、 $TX$  値、 $\bar{\partial}$  閉な  $(0, 1)$  形式で代表される。それらの代表元を  $\{\theta_1, \dots, \theta_{3g-3}\}$  とする。

$$\theta = \sum_{i=1}^{3g-3} t_i \theta_i$$

とおく。このとき

$$\bar{\partial}_{\theta} = \bar{\partial} - \theta$$

と置くと、

$$\bar{\partial}_{\theta}^2 = 0$$

である。Newlander-Nirenberg の定理により、 $\bar{\partial}_{\theta}$  は  $|t_i|$  が十分小さければ、複素構造を定める。 $(t_1, \dots, t_{3g-3})$  の任意性から定理が従う。□

## 17 倉西族

$f : X \rightarrow \Delta^m$  を複素解析族とする。このとき可微分自明化

$$\Phi : X_0 \times \Delta^m \rightarrow X$$

が存在する。このとき  $X$  上の  $\bar{\partial}$  作用素は  $X_0 \times \Delta^m$  でどのように見えるだろうか。つまり

$$\Phi^* \circ \bar{\partial} \circ (\Phi^*)^{-1} = \bar{\partial} + \theta$$

と書くとき  $\theta$  は何者であろうか。今  $\mathcal{U} = \{U_j\}$  を  $X_0$  の座標近傍系として  $z \in U_j$  に対して

$$\Phi(z, t) = (\zeta_j(z, t), t)$$

と書く

$$\zeta_j(z, t) = (\zeta_j^1(z, t), \dots, \zeta_j^n(z, t))$$

各  $X_t$  は  $z \rightarrow \zeta_j(z, t)$  が複素座標となる複素構造を持つ。  $\Delta^m$  を十分小さくとると

$$\det\left(\frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial z^\lambda}\right) \neq 0$$

としてよい。この仮定から

$$\bar{\partial} \zeta_j^\alpha(z, t) = \sum_{\lambda=1}^n \varphi_j^\lambda \partial_\lambda \zeta_j^\alpha(z, t)$$

なる  $(0, 1)$  形式

$$\varphi_j^\lambda = \sum_{\nu=1}^n \varphi_{j\nu}^\lambda d\bar{z}^\nu$$

が存在する。さて

$$\sum_{\lambda=1}^n \varphi_j^\lambda \partial_\lambda$$

とおくとベクトル値  $(0, 1)$  形式で、これは大域的に定義されている。実際、座標変換を

$$\zeta_j^\alpha(z, t) = f_{jk}^\alpha(\zeta_k(z, t), t)$$

とすると

$$\bar{\partial} \zeta_j^\alpha(z, t) = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial \zeta_k^\beta} \bar{\partial} \zeta_k^\beta(z, t)$$

が成り立つ。従って、

$$\sum_{\lambda=1}^n \varphi_j^\lambda \partial_\lambda \zeta_j^\alpha(z, t) = \sum_{\lambda=1}^n \varphi_k^\lambda \partial_\lambda \zeta_k^\alpha(z, t)$$

$$\varphi(t) = \varphi(z, t) = \sum_{\lambda=1}^n \varphi^\lambda(z, t) \partial_\lambda$$

とおくと

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))f = 0$$

が  $f$  が  $X_t$  上正則ということと同値である。この場合

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))^2 = 0$$

は明らかである。この条件は

$$\bar{\partial}\varphi^\lambda(t) = \sum_{\mu=1}^n \varphi^\mu(t) \wedge \partial\varphi^\lambda(t)$$

と書ける。この条件をきれいに書くためにポアソン積

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n (\varphi^\mu \wedge \partial_\mu \psi^\lambda - (-1)^{pq} \psi^\mu \wedge \partial_\mu \varphi^\lambda) \partial_\lambda$$

を使うと

$$\bar{\partial}\varphi(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] \quad (1)$$

が条件となる。逆に上の式が満たされれば、

$$(\bar{\partial} - \varphi(t))^2 = 0$$

が成り立つがこれは、概複素構造の積分可能条件であり、 $t$ が十分小さい場合は  $X$  に複素構造が入る (Newlander-Nirenberg の定理)。

そこで方程式 1 を解けば、逆に  $X_0$  を含む複素解析族ができることが分かる。

倉西族の構成は以下のようにする。 $X_0$  をコンパクト複素多様体とし、 $TX$  にエルミート計量  $g$  を一つ固定する。このとき調和積分論により

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(TX)) \simeq \mathbb{H}^{0,1}(TX)$$

が成り立つここで  $\mathbb{H}^{0,1}(TX)$  は  $TX$  値調和  $(0, 1)$  形式の空間である。さて

$$\beta_1, \dots, \beta_m$$

を  $\mathbb{H}^{0,1}(TX)$  の正規直交基底とする。このとき

$$\varphi|_1 = \sum_{i=1}^m \beta_i t_i$$

とおく。

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi|_\mu$$

とおく。ここで  $\varphi|_\mu$  は  $\mathbb{H}^{0,1}(TX)$  値の  $t_1, \dots, t_m$  の  $\mu$  次斉次式である。さて  $\mu$  次まで決まったとして

$$\bar{\partial}\varphi|_\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\mu-1} [\varphi|_\nu, \varphi|_{\mu-\nu}] \quad (2)$$

を解くことになる。今

$$H : H^0(X_0, \mathcal{A}^{0,1}(TX)) \longrightarrow \mathbb{H}^{0,1}(TX)$$

を調和射影とすると

$$H\left(\sum_{\nu=1}^{\mu-1}[\varphi_{|\nu}, \varphi_{|\mu-\nu}]\right) = 0$$

が 2 が解をもつための  $t$  の満たすべき条件である。この条件の下で、ノルムが最小の解は

$$\varphi_{|\mu} := \bar{\partial}^* G\left(\sum_{\nu=1}^{\mu-1}[\varphi_{|\nu}, \varphi_{|\mu-\nu}]\right)$$

で与えられる。ここで  $G$  はグリーン作用素

$$G := \square^{-1} : \mathbb{H}^{0,1}(TX)^\perp \longrightarrow \mathbb{H}^{0,1}(TX)^\perp$$

である。

$$\square = \bar{\partial}^* \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^*$$

このようにして  $\varphi(t)$  が形式的べき級数として定義され

$$\bar{\partial} \varphi(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)]$$

が  $H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$  上で解かれる。

後は、解の評価を行なって、形式解の収束を証明すればよい。証明は優級数の方法を用いる。

### 補題 17.1

$$B(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu / \nu^2$$

とおくと

$$B(t)^2 \ll 16B(t)$$

が成り立つ。ここで  $\ll$  は左辺の級数の係数の絶対値が右辺のそれより小さいことを指す。

### 証明

$$B(t)^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu / \nu^2\right) \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} t^\mu / \mu^2\right) = \sum_{\nu=2}^{\infty} t^\nu \sum_{\lambda+\mu=\nu} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}$$

で

$$\sum_{\lambda+\mu=\nu} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \leq \frac{8^2}{\nu} \sum \frac{1}{\lambda^2} \leq 161\nu^2$$



より従う。□

$$A(t) = \frac{b}{16c} \sum \frac{c^\nu (t_1 + \cdots + t_m)^\nu}{\nu^2}$$

とおくと

$$A(t)^2 \ll \frac{b}{c} A(t)$$

が成り立つ。

$$\|\varphi(t)\|_{k,\alpha} \ll A(t)$$

を示す。ここで  $\|\varphi(t)\|_{k+\alpha}$  はヘルダーノルムを表す ( $X_0$  にはエルミート計量が定められているので、ノルムは確定する)。ヘルダーノルムというのは、 $k$  階までの偏微分のノルムと  $k$  階微分の  $\alpha \in (0, 1)$  ヘルダーノルムの和で定義されるノルムである。今

$$\psi_\mu = \frac{1}{2} [\varphi(t), \varphi(t)]_\mu$$

とおく。右辺は  $\mu$  次の係数を取るという意味である。このとき

$$\varphi_\mu = \bar{\partial}^* G \psi_\mu$$

であるから

$$\|\varphi_\mu\|_{k+\alpha} \leq K_1 \|\psi_\mu\|_{k-1+\alpha}$$

が成り立つ (ここで  $G$  は正則性を二階上げることを使った)。一方

$$\|\psi_\mu\|_{k-1+\alpha}(t) \leq K_2 \|\varphi_\mu(t)\|_{k+\alpha} \cdot \|\varphi_\mu(t)\|_{k+\alpha}$$

なので

$$\|\varphi_\mu\|_{k+\alpha}(t) \ll K_1 K_2 A(t)^2 \ll \frac{K_1 K_2 b}{c} A(t)$$

となる。従って漸化式とゴルディング不等式から

$$\|\varphi_\mu\|_{k+\alpha} \ll K_1 K_2 A(t)^2$$

を得る。

**定理 17.2**  $X_0$  をコンパクト複素多様体とする。このとき  $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(TX_0))$  の原点の近傍  $U$  と  $U$  の解析的部分集合  $V$  が存在して、完備複素解析族

$$\pi : X \longrightarrow V$$

が存在する。

**証明** 完備性だけ証明すればよい。

$$f: X' \longrightarrow S$$

を複素解析族で  $O \in S$  のファイバー  $X'_O$  が  $X_0$  と双正則同値であるとする。  
 $S$  は多重円板  $\Delta^d$  として一般性を失わない。

$$\rho_O: TS_O \longrightarrow H^1(X'_O, \mathcal{O}_{X'_O}(TX'_O)) \simeq H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(TX_0))$$

を考えると

$$\phi: S \longrightarrow V$$

が 1 ジェットレベル (つまり 1 次の無限小近傍) で構成できる。 $O$  の  $\mu-1$  次の無限小近傍まで構成できたとして、

$$\phi_\mu: S|_\mu \longrightarrow V_\mu$$

を構成する。これは帰納的にできる。

上の族を倉西族という。特に  $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(TX_0)) = 0$  であれば、倉西族の底空間  $V$  は  $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(TX_0))$  の原点の近傍と一致する。一次元複素多様体について、そのドルボーコホモロジーは  $H^q(q \geq 2)$  で全て 0 になった。そのために次が得られる。

**例 17.3**  $X$  をコンパクトリーマン面で種数  $g \geq 2$  とすると、倉西族の底空間は  $3g-3$  次元の複素多様体である。

倉西族には  $X_0$  の複素解析的自己同型群  $\text{Aut}(X_0)$  が作用する。その作用で  $V$  を割ったものが、モジュライ空間の断片と見なせるものである。

**定理 17.4** 種数 2 以上のコンパクトリーマン面の自己同型群は有限群である。

**証明**  $C$  を種数 2 以上のコンパクトリーマン面であるとする。このとき、 $C$  の普遍被覆は単位円板  $\Delta$  と複素解析的に同型であった。そこで  $g: C \longrightarrow C$  を自己同型とすると、 $g$  は  $\tilde{g}: \Delta \longrightarrow \Delta$  に持ち上げることができる。このとき、ベルグマン計量に関して  $\tilde{g}$  は等長的である。即ち、 $g$  自身が、ベルグマン計量から誘導される  $C$  の計量に関して等長的である。したがって  $\text{Aut}(X)$  は点列コンパクトで従ってコンパクトである。ところがコンパクト複素リー群はトーラスであるから、リュービルの定理から  $\text{Aut}(X)$  は有限群である。□

## 18 モジュライ空間

コンパクト複素多様体のモジュライ空間とは、全てのコンパクト複素多様体の集合に、複素解析的同値による同値関係を入れたものである。

$\mathcal{I}$  を射影空間  $\mathbb{P}^n$  上の連接イデアル層とする。このとき  $\mathcal{I}(m) = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$  とおく。 $\mathcal{I}$  に対応する  $\mathbb{P}^n$  の解析的集合を  $V$  と書くと

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \rightarrow \mathcal{O}_X(m) \rightarrow 0$$

は完全列である。さて

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_X(m)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m)) \rightarrow \dots$$

は完全列である。

$V$  の **ヒルベルト多項式 (Hilbert polynomial)** を

$$P_V(m) := \chi(V, \mathcal{O}_V(m))$$

で定義する。このとき  $m \gg 1$  ならば  $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m)) = 0$  であるから  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m))$  は  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$  の余次元  $P(m)$  の部分空間である。

従って  $\mathcal{I}$  と自然数  $m \gg 1$  に対して部分空間

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m)) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$$

を対応させることができる。この部分空間は

$$\text{Gr}\left(\binom{m+n+1}{m}, P(m)\right)$$

の点と同一視できる。

このようにして  $\mathcal{I}$  はグラスマン多様体の中の部分空間を描くことになる。ヒルベルト多項式  $P$  を固定した時、十分大きな  $m$  を固定して

$$\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}(P(m))$$

でヒルベルト多項式  $P(m)$  を持つ  $\mathbb{P}^n$  の連接イデアル層の全体を表す。このとき次の定理が成り立つ。

**定理 18.1**  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}(P(m))$  は十分大きな  $m$  に対して

$$\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}(P(m)) \hookrightarrow \text{Gr}\left(\binom{m+n+1}{m}, P(m)\right)$$

は埋め込みになる。さらに像は連結である。

このように  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}(P(m))$  は射影的スキームとして実現できる。

**定義 18.2**  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}(P(m))$  をヒルベルト多項式  $P$  に対する  $\mathbb{P}^n$  のヒルベルトスキームという。

このようにヒルベルトスキームは、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  の连接的イデアル層をパラメトライズする空間である。

今  $X \subset \mathbb{P}^n$  を射影代数多様体とすると、 $X$  のイデアル層、即ち  $X$  で 0 となる正則関数の芽の層は  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  の连接的イデアル層であり、 $X$  は  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$  の点を与えることがわかる。この点を  $X$  のヒルベルト点 (**Hilbert point**) と呼ぶ。

代数的なモジュライ空間の構成において次の定理は基本的である。

**定理 18.3** (松阪の定理)  $P$  を一変数多項式とする。次のような滑らかな偏極代数多様体の全体の集合を考える。

$$\{(X, L) \mid \chi(X, \mathcal{O}_X(mL)) = P(m)\}$$

とおく。このとき  $P$  のみによる定数  $m_P$  が存在して、すべての  $m \geq m_P$  に対して  $mL$  は非常に豊富 (*very ample*) になる。

## 19 Weil-Petersson 計量

$f: X \rightarrow S$  をコンパクトリーマン面の複素解析族とする。このとき  $S$  に計量を導入することを考える。

$$\rho: TS \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X(T_{X/S})$$

を小平-スペンサー写像とする。今、 $X_s (s \in S)$  には定曲率  $-1$  のエルミート計量  $g_s$  を与えておく。この存在と一意性は既に証明した。今、調和積分論により、同型

$$H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(TX_s)) \simeq \mathbb{H}^{0,1}(TX_s)$$

が決まる。ここで  $\mathbb{H}^{0,1}(TX_s)$  は計量  $g_s$  に関する  $TX_s$  に値を持つ調和  $(0, 1)$  形式の空間である。

さて  $\mathbb{H}^{0,1}(TX_s)$  には  $g_s$  から自然に定義されるエルミート内積  $(\cdot, \cdot)$  が定義される。このようにして局所自由層

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X(T_{X/S})$$

にエルミート計量が決まる。従ってこの計量を  $\rho$  により引き戻すことで、 $TS$  にも (退化しているかもしれない) エルミート形式が定まる。これを

**Weil-Petersson** 計量と呼び  $g_{WP}$  で表す。

特に  $f: X \rightarrow S$  が倉西族であれば、この内積は  $S$  の各点で非退化であり  $S$  のエルミート計量を与えている。

今、リーマン面の普遍族 (タイヒミュラー空間) を

$$\mathcal{T} := \{(C, [f]) \mid f : C \rightarrow C_0\}$$

と置く。ここで

$$(C, [f]) \sim (C', [f'])$$

は  $C, C'$  はある双正則写像

$$\varphi : C \rightarrow C'$$

により解析的に同値、かつ  $f$  と  $f' \circ \varphi$  はイソトピックのとき同値であると定める。

$\mathcal{T}_g$  は  $H^1(C_0, TC_0)$  内の有界領域として実現される (Bers の定理)。これは次のように観察される。

$$h : C \rightarrow C'$$

を2つのコンパクトリーマン面の間の可微分同相とすると、

$$\phi_h = \bar{\partial}h / \partial h$$

をベルトラミ微分 (Beltrami differential) と呼ぶ。ベルトラミ微分は  $h$  の等角写像からの距離を表している。

今、 $C'$  の局所座標を  $w, C$  の局所座標を  $z$  として  $w = h(z)$  と書けているとすると、

$$\phi_h = \frac{dw/d\bar{z}}{dw/dz}$$

である。また

$$\text{Jac}(h) = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 - \left| \frac{dz}{d\bar{w}} \right|^2$$

が成り立つので、 $h$  が向きを保つのであれば

$$|\phi_h| < 1$$

が成り立つ。 $|\phi_h|$  を  $h$  の歪曲率 (delatation) と呼ぶ。

$C_0$  を種数  $g$  のリーマン面とし、 $C_0$  を中心とする倉西族

$$f : C \rightarrow S$$

をとる。原点  $O$  のファイバーが  $C_0$  であるとする、この族は構成から自然な可微分自明化

$$\Phi : C_0 \times S \rightarrow C$$

をもつ。このとき向きを保つ可微分同相写像

$$h_s : C_0 \longrightarrow C_s (s \in S)$$

が  $\Phi$  によって引き起こされる。

$h_s$  の歪曲率を  $\mu(s)$  とすると、 $\mu_s < 1$  となるが、 $\mu_s < 1$  なる点を中心とした倉西族を接続できるので、 $S$  は丁度  $\mu_s < 1$  となる  $\mathbb{C}^{3g-3}$  の有界領域として実現できる。これがタイヒミュラー空間  $\mathcal{T}_g$  の解析的な実現である。

今  $M_g$  を種数  $g$  のリーマン面の写像類群とする。即ち、 $M_g$  は  $\text{Diff}(C_0)/\text{Diff}^0(C_0)$  である。ここで  $\text{Diff}(C_0)$  は  $C_0$  の可微分自己同型の全体の群で  $\text{Diff}^0(C_0)$  は、その単位元の連結成分である。

今、Weil-Petersson 計量  $g_{WP}$  が  $\mathcal{T}_g$  上にエルミート計量を定義し、明らかに  $M_g$  は、等距自己同型として、 $\mathcal{T}_g$  に作用する。

この商空間  $\mathcal{T}_g/M_g$  がコンパクトリーマン面のモジュライ空間である

## 20 Berndtsson の定理

**定理 20.1** (Berndtsson)  $D$  を  $\mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w^k$  の擬凸領域とする。このとき  $D_w = D \cap \mathbb{C}_z^n \times \{w\}$  のベルグマン核 (の対角部分) を  $K(z, w)$  とすると、 $\log K(z, w)$  は  $D$  上多重劣調和関数である。□

**定理 20.2** (Berndtsson)  $\Omega$  を  $\mathbb{C}_z^n$  の有界領域で、 $U$  を  $\mathbb{C}_t^k$  の領域とする。 $\phi$  を  $\bar{\Omega} \times U$  の近傍で滑らかな多重劣調和関数とする。 $A^2(\Omega) \times \{t\}$  にエルミート計量

$$h_t(f, g) = \int_{\Omega} f(z) \cdot g(\bar{z}) d\mu(z)$$

を入れる。これにより自明なヒルベルト束  $A^2(\Omega) \times U$  にエルミート計量が入る。

このとき  $\Theta_h$  は中野半正である。□

これら定理から次の定理が証明される。

**定理 20.3**  $f : X \longrightarrow S$  を滑らかな射影的射とする。 $(L, h)$  を曲率が半正のエルミート直線束とする。このとき  $S$  上の局所自由層

$$E = R^q f_* \mathcal{O}_X(K_{X/S} + L)$$

は全ての  $q \geq 0$  に対して、中野半正になる。□

**定理 20.4**  $f : X \longrightarrow S$  を滑らかな射影的射とする。このとき  $f_* \mathcal{O}_X(mK_{X/S})$  は中野半正の連続なエルミート計量を持つ。□

## 20.1 Griffith の公式

$X$  を複素多様体、 $(E, h)$  を  $X$  上のエルミート正則ベクトル束とする。 $F$  を  $E$  の正則部分ベクトル束とする。 $D^E$  を  $E$  のエルミート接続とする。

$$\pi : E \longrightarrow F$$

を直交射影とする。

$$\Theta^E = \sum \Theta_{j\bar{k}} dt_j \wedge d\bar{t}_k$$

とおくと、 $\Theta^E = (D^E)^2$  であるから、

$$\Theta_{j\bar{k}} = [D_{t_j}, \bar{\partial}_{t_k}]$$

で与えられる。

$\sigma$  を  $F$  の  $C^\infty$  切断とする。

$$D^F \sigma = \pi(D^E \sigma)$$

とおくと、 $\sigma, \tau \in C^\infty(X, F)$  に対して、

$$dh(\sigma, \tau) - h(D^E \sigma, \tau) - h(\sigma, D^E \tau)$$

で

$$h(D^E \sigma, \tau) = h(D^F \sigma, \tau), h(\sigma, D^E \tau) = h(\sigma, D^F \tau)$$

であるから  $D^F$  は  $h|_F$  に関するエルミート接続である。今

$$D^E \sigma = D^F \sigma + \pi_\perp D^E \sigma$$

とおく。

$$\bar{\partial}_{t_j}(\pi\sigma) = (\bar{\partial}\pi)\sigma + \pi(\bar{\partial}_{t_j}\sigma)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{j\bar{k}}^F \sigma &= [D_{t_j}^F, \bar{\partial}_{t_k}] \sigma \\ &= [\pi D_{t_j}^E, \bar{\partial}_{t_k}] \sigma \\ &= \pi \Theta_{j\bar{k}}^E + (\bar{\partial}_{t_k} \pi) D_{t_j}^E \sigma \end{aligned}$$

を得る。また  $\sigma$  が  $F$  の切断なら

$$(\bar{\partial}\pi)\sigma = 0$$

である。従って

$$(\bar{\partial}\pi)D^E \sigma = (\bar{\partial})\pi_\perp D^E \sigma$$

が成り立つ。  $\pi \cdot \pi_{\perp} = 0$  であるから、

$$(\bar{\partial}\pi)\pi_{\perp}D^E\sigma = -\pi\bar{\partial}(\pi_{\perp}D^E\sigma)$$

が成り立つ。そこで  $\sigma, \tau$  が  $F$  の切断の場合

$$\begin{aligned} h((\bar{\partial}_{t_k}\pi)D_{t_j}^E\sigma, \tau) &= -h(\bar{\partial}_{t_k}(\pi_{\perp}D_{t_j}^E\sigma), \tau) \\ &= h((\pi_{\perp}D_{t_j}^E\sigma), D_{t_k}^E\tau) = h((\pi_{\perp}D_{t_j}^E\sigma), \pi_{\perp}(D_{t_k}^E\tau)) \end{aligned}$$

を得る。従って、以上から

$$h(\Theta_{j\bar{k}}^E\sigma, \tau) = h(\pi_{\perp}(D^E\sigma), \pi_{\perp}(D^E\tau)) + h(\Theta_{j\bar{k}}^F\sigma, \tau)$$

を得る。この公式を **Griffith** の公式と呼ぶ。

## 20.2 Berndtsson の定理の証明

$\Omega$  を  $\mathbb{C}_z^n$  の有界領域で、 $U$  を  $\mathbb{C}_t^k$  の領域とする。 $\phi$  を  $\bar{\Omega} \times U$  の近傍で滑らかな多重劣調和関数とする。 $A^2(\Omega) \times \{t\}$  にエルミート計量

$$h_t(f, g) = \int_{\Omega} f(z) \cdot g(\bar{z}) e^{-\phi_t} d\mu(z)$$

を入れる。これにより自明なヒルベルト束  $A^2(\Omega) \times U$  にエルミート計量が入る。

このとき  $F := A^2(\Omega) \times U$  は  $E := L^2(\Omega) \times U$  の正則部分束である。つまり包含写像

$$A^2(\Omega, e^{-\phi_t}) \subset L^2(\Omega, e^{-\phi_t})$$

により部分束と見なすことができる。この場合

$$D_{t_j}^E = \partial_{t_j} - \phi_j$$

$$\phi_j = \partial_{t_j} \phi_t$$

となる。従って

$$\Theta_{j\bar{k}}^E = \phi_{j\bar{k}}$$

となる。中野半正値性を示すには

$$\sum (\Theta_{j\bar{k}}^F u_j, u_k)$$



を下から評価すればよい。Griffith の公式から、このためには

$$\sum (\pi_{\perp}(\phi_j u_j), \pi_{\perp}(\phi_k u_k)) = \|\pi_{\perp}(\sum \phi_j u_j)\|^2$$

を上から評価すればよい。

$$w = \pi_{\perp}(\sum \phi_j u_j)$$

とおくとき

$$\bar{\partial}w = \sum u_j \phi_{j\lambda} d\bar{z}_{\lambda}$$

が成り立つ。さらに  $w$  は  $A^2(\Omega)$  に直交しているので、この方程式の最小解である。

最小解の大きさは、 $L^2$  評価式で評価することができる。これから

$$\int_{\Omega} |w|^2 e^{-\phi_t} \leq \int_{\Omega} \sum \phi^{\lambda\mu} \phi_{j\lambda} u_j \phi_{k\mu} \bar{u}_k e^{-\phi_t}$$

を得られる。

$$\sum (\Theta_{j\bar{k}}^F \sigma_j, \sigma_k) \geq \int_{\Omega} (\phi_{j\bar{k}} - \sum_{\lambda\mu} \phi^{\lambda\mu} \phi_{j\lambda} \phi_{k\mu}) u_j \bar{u}_k e^{-\phi_t}$$

$$D_{j\bar{k}} = (\phi_{j\bar{k}} - \sum_{\lambda\mu} \phi^{\lambda\mu} \phi_{j\lambda} \phi_{k\mu})$$

が各点で正定値であることが言えればよい。これは正定値エルミート行列の性質から分かる。 $u = (1, 0, \dots, 0)$  としてよい。このとき

$$\Phi = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi$$

とおく。

$$\Phi = \Phi_{11} + \sqrt{-1} \alpha \wedge d\bar{t}_1 + \sqrt{-1} dt_1 \wedge \bar{\alpha} + \Phi'$$

ここで  $\alpha$  は  $z$  に関して  $(1, 0)$  型、 $\Phi'$  は  $z$  に関して  $(1, 1)$  型である。

$$\Phi^{m+1}/(m+1)! = \Phi_{11} \wedge \Phi'_m - \sqrt{-1} \alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \Phi_{m-1} \wedge \sqrt{-1} dt_1 \wedge d\bar{t}_1$$

である。両辺の係数を比較すれば、所用の結果を得る。

### 20.3 Weil-Petersson 計量の曲率

**定理 20.5**  $f : X \rightarrow S$  を種数  $g$  以上の代数曲線の有効にパラメトライズされた複素解析族とする。このとき  $S$  上の Weil-Petersson 計量  $g_{WP}$  は非退化エルミート計量で、その曲率は双対中野負である。

$\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow S$  を普遍被覆の族とする。Bers の同時一意化定理により、 $\tilde{X}$  は  $\mathbb{C} \times S$  の擬凸領域である。従って、Berndtsson の定理により、 $\tilde{X}_s$  のベルグマン核の族  $K(z, s)$  は

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K(z, s) > 0$$

を満たす。

$$\tilde{h} = 1/K$$

とおくと  $K_{\tilde{X}/S}$  の正曲率エルミート計量である。

この計量は基本群の作用で不変なので  $K_{X/S}$  の計量  $h$  を定める。 $\Theta_h$  は正值である。

次に今度は  $2K_{X/S}$  に定理を適用すると

$$f_*\mathcal{O}_X(2K_{X/S})$$

は中野正である。Serre の双対定理により、Weil-Petersson 計量の曲率は双対中野負である。□

## 20.4 負曲率と双曲性

$\mathcal{M}_g$  を種数  $g$  の滑らかな代数曲線のモジュライ空間とする。このとき

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\Gamma_g$$

と書けるが、

$$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$$

を普遍族とすると、 $T\mathcal{T}_g$  は Weil-Petersson 計量を持ち、これは上の結果から真に負曲率である。

$$\Theta: \text{End}(T\mathcal{T}_g) \otimes \wedge^{1,1}$$

を曲率テンソルとする。このとき

$$\text{Ric} = \text{Trace } \Theta$$

を Ricci テンソルという。これは、Chern-Weil 準同型により、直線束  $\det T\mathcal{T}_g$  の曲率テンソルである。

従って、 $K$  を  $\mathcal{T}$  の標準束とすると、正の直線束である。

**定理 20.6** (Yau の Schwarz 補題)  $(M, g)$  を完備ケーラー多様体。  $(N, h)$  を (完備とは限らない) エルミート多様体で、正数  $A, B$  が存在して

$$\text{Ric}_g \geq -Ag$$

かつ

$$\Theta_h \text{ の正則双断面曲率 } \leq -B$$

とする。このとき任意の正則写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

について

$$f^*h \leq \frac{A}{B}g$$

が成り立つ。

**証明** エルミート多様体  $M^m$  のローカルユニタリフレームを  $\{e_1, \dots, e_m\}$ ,  $\theta^1, \dots, \theta^m$  をコフレームとする。

$$dS_M^2 = \sum_{i=1}^m \theta_i \bar{\theta}_i$$

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^m \theta_j \wedge \theta_{ij} + \Theta_i$$

$$\theta_{ij} + \bar{\theta}_{ji} = 0$$

が成り立つ (エルミート接続の性質)。

$$\Theta_i = \frac{1}{2} \sum_{jk=1}^m T_{ijk} \theta_i \wedge \theta_k$$

をトーションという。

$$\Theta_{ij} = d\theta_{ij} + \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kj}$$

が曲率テンソルである。

$$\Theta_{ij} = -\overline{\Theta_{ji}} = \frac{1}{2} \sum R_{ijkl} \theta_k \wedge \bar{\theta}_l$$

$$R_{ijkl} = \overline{R_{jilk}}$$

が成り立つ。

$$\xi = \xi_i e_i, \eta = \sum \eta_i e_i$$

に対して

$$\frac{\sum_{ijkl} R_{ijkl} \bar{\xi}_i \xi_j \bar{\eta}_k \eta_l}{\|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2}$$

を正則双断面曲率という。

$N^n$  を別のエルミート多様体  $\omega_\alpha$  をコフレーム  $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$  を曲率テンソルとすると

$$f : M \longrightarrow N$$

を正則写像として、

$$f^* \omega_\alpha = \sum a_{\alpha i} \theta_i$$

と書ける。

$$u = \sum a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha i}$$

とおくと

$$f^* dS_N^2 \leq u \cdot dS_M^2$$

が成り立つ。このとき Chern-Lu の公式

$$\Delta u \geq \sum_{ij} R_{ji} a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha j} - \sum_{ik} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{a}_{\alpha i} a_{\beta i} \bar{a}_{\gamma k} a_{\delta k} S_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

が成り立つ。

$c > 0$  を任意にとって

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{u+c}} = \frac{-\Delta u}{2(u+c)^{3/2}} + \frac{3}{(u+c)^{5/2}} \sum |u_i|^2$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{1}{\sqrt{u+c}} \right) &\leq \frac{3}{(u+c)^{5/2}} \sum |u_i|^2 - \frac{1}{2(u+c)^{3/2}} \\ &\quad \times \left[ \sum_{ij} R_{ji} a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha j} - \sum_{ik} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{a}_{\alpha i} a_{\beta i} \bar{a}_{\gamma k} a_{\delta k} S_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき最大値原理から

$$\frac{1}{4(u+c)^3} \sum |u_i|^2 < \varepsilon$$

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{u+c}} > -\varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt{u+c}} < \inf \frac{1}{\sqrt{u+c}} + \varepsilon$$

となる点がある。

$$\frac{-1}{2(u+c)^2} \left[ \sum_{ij} R_{ji} a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha j} - \sum_{ik} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{a}_{\alpha i} a_{\beta i} \bar{a}_{\gamma k} a_{\delta k} S_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \geq -\varepsilon \left( \inf \frac{1}{\sqrt{u+c}} + \varepsilon \right) - 12\varepsilon$$

となる。 $K_1$  を  $M$  のリッチ曲率の下限、 $K_2$  を正則双断面曲率の上限とすると

$$\frac{-u}{(u+c)^2} K_1 + \frac{u^2}{(u+c)^2} K_2 \geq -2\varepsilon \left( \inf \frac{1}{\sqrt{u+c}} + \varepsilon \right) - 24\varepsilon$$

となる。従って  $\varepsilon \rightarrow 0$  として

$$\sup u \leq \frac{K_1}{K_2}$$

が成り立つ。  $\square$

$X$  を解析空間とする。 $(\Delta, \omega_P)$  をポアンカレ計量を入れた単位円板とする。 $x, x' \in X$  に関して、点列  $x = x_0, x_1, \dots, x_m = x'$  と正則写像

$$f_i : \Delta \rightarrow X (1 \leq i \leq m)$$

と  $z_i, w_i \in \Delta$  で

$$f(z_i) = x_{i-1}, f(w_i) = x_i$$

となるものを取り

$$\sum_{i=1}^m d_P(z_i, w_i)$$

を考える。これらの点列、正則写像を動かしたときの  $\sum_{i=1}^m d_P(z_i, w_i)$  の下限を

$$d_X(x, x') = \inf \sum_{i=1}^m d_P(z_i, w_i)$$

で表し、これを  $x, x'$  の小林擬距離 (**Kobayashi pseudodistance**) という。

定義により、任意の正則写像

$$f : X \rightarrow Y$$

に対して

$$d_X(P, Q) \geq d_Y(f(P), f(Q))$$

が成り立つ。

**定義 20.7** 解析空間  $X$  が小林双曲的 (Kobayashi hyperbolic) であるとは、小林擬距離が距離になることである。

$$f : S \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

が許容写像 (admissible morphism) であるとは、ある種数  $g$  の曲線族

$$\pi : X \longrightarrow S$$

が存在し、 $f(s) = [\pi^{-1}(s)]$  が全ての  $s \in S$  について成り立つことである。

**定義 20.8**  $\mathcal{M}_g$  が  $V$  双曲的とは、許容正則写像  $f : \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_g$  の族に関する小林擬距離が距離であることである。

この定理 20.6 から次のことが分かる。

**定理 20.9**  $\mathcal{M}_g$  は  $V$ -小林双曲的である。

実際、定理 20.6 により、 $d_{\mathcal{M}_g}$  は Weil-Petersson 距離の正定数倍より大きい。

**系 20.10**

$$f : X \longrightarrow S$$

を種数  $g \geq 2$  の代数曲線を一般ファイバーに持つ、完備代数曲線  $S$  上の代数的ファイバー空間とする。 $S$  の種数を  $g(S)$ 、特異ファイバーの本数を  $p$  とおくと、

$$2g(S) - 2 + p > 0$$

が成り立つ。

## 20.5 調和写像とシャファレヴィッチの予想

**定理 20.11**  $S$  を穴あきリーマン面とする。このとき  $S$  上の種数  $g$  の代数曲線の複素解析族は有限個しかない。

証明には調和写像の理論を用いる。

## 21 余接束の Zariski 分解