ミンコフスキー空間上の微分形式

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

この記事では，相対性理論などに使われるミンコフスキー空間という空間上での微分形式を考えてみます．立派な名前がついていますが，どんな空間なのかと言えば，四次元空間です．特徴として，座標基底の中に **計量が負になるものが一つ** あります．このような場合，ホッジ作用素 の取り方に注意が必要でした．（ ホッジ作用素 や p-ベクトルの内積 の記事中にもミンコフスキー空間に関する注意を書いていますので，参照下さい．）もう一度，ホッジ作用素の定義を思い出しましょう．R^n 上の p 次微分形式の基底を σ^H とすると，$*\sigma^H$ は $\wedge^{n-p}R^n$ の基底 σ^K となります．

$$\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K \tag{1}$$

ただし，$\sigma^H \wedge \sigma^K$ は，ボリュームフォームの基底の偶順列だとします．（これらは全て既習の内容なので，少し説明を端折っています．訳が分からないという人は，ホッジ作用素 の内容をもう一度よく復習して下さい．）式 (1) で問題なのは，右辺の (σ^K, σ^K) という内積です．ミンコフスキー空間の正規直交基底を $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_t}\}$ とすると，最初の三つは，普通のユークリッド空間でお馴染みの基底ですが，四番目の $\boldsymbol{e_t}$ が例の，計量が負になる基底になります．基底の内積は次のようになります．

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1-1}$$

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{e_t} \cdot \boldsymbol{e_t} = -1 \tag{1-3}$$

式 $(1-1)(1-2)$ は正規直交基底の定義として，よく知っているものです．式 $(1-3)$ が特徴的ですね．このような計量を **ローレンツ計量** と呼びます．このため，例えば $\sigma^K = \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}$ の場合と，$\sigma^K = \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_t}$ の場合では，内積 (σ^K, σ^K) が異なってきます．p-ベクトルの内積 に従って，計算してみましょう．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_1} \\ \boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{e_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2-1}$$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_t}, \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_t}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_t} \\ \boldsymbol{e_t}\cdot\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_t}\cdot\boldsymbol{e_t} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \qquad (2\text{-}2)
\end{aligned}
$$

どうやら，$\boldsymbol{e_t}$ が混ざっていると -1 になるようです．以上の議論を念頭に置きつつ，次のセクションではミンコフスキー空間上の微分形式を考えてみます．四次元の微分形式 とも，後で比べてみて下さい．

ミンコフスキー空間上の微分形式

一次微分形式の基底を (dx, dy, dz, cdt) とします．dt の前についている c が妙ですが，これは単なる定数です．気にしないで下さい (・ω・)．空間の向きを $dxdydzcdt$ という順列に決めましょう．このとき，ホッジ作用素の写像の仕方に注意が必要です．前セクションの議論により，cdt が右辺に出て来る写像には，(-1) が掛かってきます．

$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = -cdt \qquad (3\text{-}1)$$

$$*(dy \wedge dz \wedge cdt) = dx \qquad (3\text{-}2)$$

$$*(dz \wedge cdt \wedge dx) = dy \qquad (3\text{-}3)$$

$$*(cdt \wedge dx \wedge dy) = dz \qquad (3\text{-}4)$$

さらに，二次微分形式の基底のホッジ作用素も考えてみましょう．できれば，式 (1) の定義通りに計算して，これらの関係を一度自分で確認してみて下さい．

$$*(dx \wedge dy) = -dz \wedge cdt \qquad (4\text{-}1)$$

$$*(dy \wedge dz) = -dx \wedge dct \qquad (4\text{-}2)$$

$$*(dz \wedge dx) = -dy \wedge dct \qquad (4\text{-}3)$$

$$*(dx \wedge cdt) = dy \wedge dz \qquad (4\text{-}4)$$

$$*(dy \wedge cdt) = dz \wedge dx \qquad (4\text{-}5)$$

$$*(dz \wedge cdt) = dx \wedge dy \qquad (4\text{-}6)$$

ここで，式 (3)(4) で用いた基底の並びは，全て $(dx\ dy\ dz\ cdt)$ という順列の偶順列になっていますので，右辺に出てきたマイナスは，ひとえに cdt 軸の計量が負であるという事情だけによるものです．$(i\ j\ k)$ を

(1 2 3) の偶順列とし，x, y, z を x^1, y^2, z^3 と表現することにすれば，式 (3)(4) をまとめて次のように略記することも出来ます．

$$*(dx^i \wedge cdt) = dx^j \wedge dx^k \tag{5-1}$$

$$*(dx^j \wedge dx^k) = -dx^i \wedge cdt \tag{5-2}$$

ミンコフスキー空間上の微分形式などという変チクリンなものを考えた理由は，電磁気学の基礎方程式とも言えるマックスウェルの方程式を，微分形式を使って美しく記述したいという動機によるものです．本当に美しく簡単な形にまとまりますので，純粋に美学的・審美的観点からもぜひ眺めてみて欲しいものですし，そのあまりにも単純な形から，（特に幾何学的な考察によって）電磁気学をより深く理解する一助ともなることでしょう．ミンコフスキー空間上の微分形式によるマックスウェル方程式の定式化は，次 の記事で考えます．

ミンコフスキー

ミンコフスキー空間にその名を残すミンコフスキー (Hermann Minkowski (1864-1909)) は，現在のリトアニア（当時はロシア帝国領）に生まれました．両親はドイツ人で，一家もその後ドイツのケーニヒスベルグ（現在はロシアの飛び地）に引っ越していますので，ミンコフスキーはドイツ人だと考えた方が良さそうです．ミンコフスキーはケーニヒスベルグ大学へ進みますが，数学の才能は抜きん出ていたようです．ヒルベルト (David Hilbert (1862-1943)) は大学の級友で，また新任教官にはフルヴィッツ (Adolf Hurwitz (1859-1919)) がおり，彼等とは親友とも言える間柄でした．

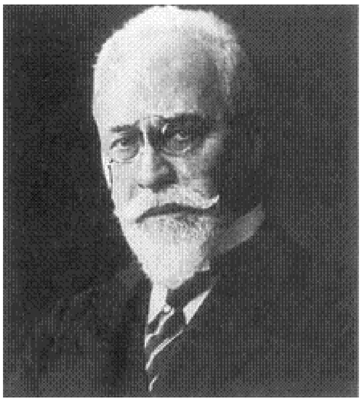

図 1　アインシュタインが数学の重要性に目覚めたのは，ミンコフスキーのお陰だ．

後年，ミンコフスキーはボン，ケーニヒスベルグなどで職を得ますが，チューリッヒの *Eidgenössische Polytechnikum Zürich* で教鞭を取っていたときの学生にアインシュタイン (Albert Einstein (1879-1955)) がいます．最後はヒルベルトの招きに応じてゲッチンゲン大学に落ち着き，数学の研究に没頭します．ミンコフスキーの功績で何よりも有名なものは，ローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)) とアインシュタインによる相対性理論を見事に記述する，ミンコフスキー空間という概念を数学的に洗練したことでしょう．ただし，ミンコフスキー自身の興味は純数

学的内容に向いており，二次形式や連分数法の研究に時間をかけています．また,「数の幾何学」という分野はミンコフスキーによって創始された，幾何学と整数論が合わさったような分野で，ミンコフスキーの凸型定理という定理は有名です．