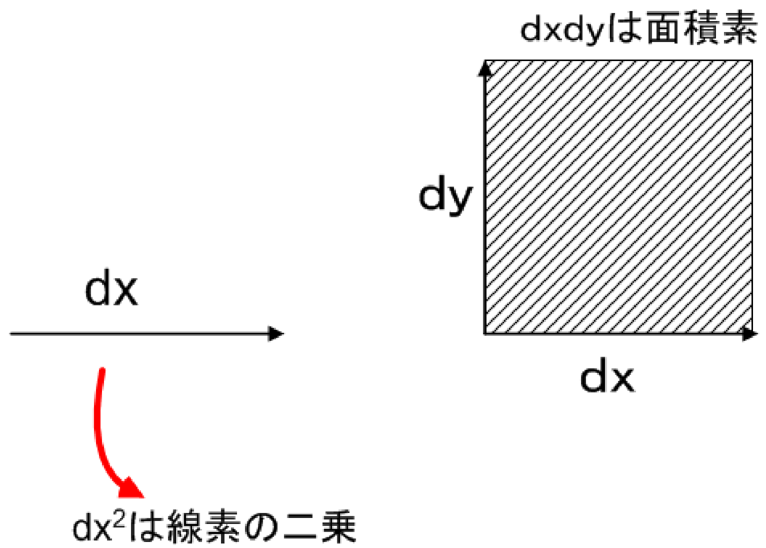
微小量の積

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

面積分や体積分には，$dxdy$ や $dxdydz$ といった量がたくさん出てきます．ここで，少し考えてみましょう．微積分では，いままで微小量 dx の高次の項，例えば dx^2 や dx^3 を無視してきました．少し正確に言えば，$dx \to 0$ とした極限では，その影響を無視できると考えて来たわけです．ところが，面積分や体積分には $dxdy$, $dxdydz$ といった形の微小量が出てきました．ここで『あれ，これは二次以上の微小量なんじゃないの？』と引っ掛かった人がいるかも知れません．

この事情は，直観的には次のように理解できます．図で考えれば，dx^2 は線素である dx を二乗したのに過ぎないのに対し，$dxdy$ は微小な面積を表わしているという違いが分かると思います．



体積素についても同様です．『微小量の高次項は落とす』という，微積分学で使っていた近似は有効で，dS^2 や dV^2 が式の中に出てきたら落としてしまって構いません．しかし，線素 dx，面積素 dS，体積素 dV は，一口に微小量と言っても **次元が違う微小量** なのです．

> **Important**
>
> **dx^2 は線素という微小量の二次の微小量ですが，$dS = dxdy$ は面積素という微小量の一次の微小量です．**

だいたいの直観的理解は上の図から得られると思いますが，正確な議論は解析学によらなければなりま

せん.

微分形式による表現

微分形式による表現では，線素，面積素，体積素はそれぞれ一次微分形式，二次微分形式，三次微分形式の基底として表現されました.

$$dx,\ dy,\ dz$$

$$dy \wedge dz,\ dz \wedge dz,\ dx \wedge dy$$

$$dx \wedge dy \wedge dv$$

前セクションで，『線素 dx，面積素 dS，体積素 dV は，一口に微小量と言っても次元が違う微小量なのです』と書きましたが，微分形式で書けば，これらは全て異なるベクトル空間の元なのですから，違いはより明快です.

また,『同じ種類の微小量の高次項は落とす』というルールと，微分形式の『同じ元のウェッジ積は 0 になる』という演算則は綺麗に対応しています.（式中，例として $dS = dxdy$ とします.）

$$dx^2 = 0 \quad \rightarrow \quad dx \wedge dx = 0$$

$$dS^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (dx \wedge dy) \wedge (dx \wedge dy) = 0$$

$$dV^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (dx \wedge dy \wedge dz) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz) = 0$$

もう一度，強調しておきますが，微分形式の理論は，外積代数の枠組みで，基底を x, y, z などの代わりに dx, dy, dz としてみただけのものでした．そして，外積代数の演算規則そのものは，テンソル代数から導かれたもので，あまり微積分学とは関係なさそうに思えました．ところが，微分形式を，線素，面積素，体積素などと対応させて考えてみると，**微積分の演算法則と外積代数の演算則が，驚くほど整合する** ことに気がつくと思います．これは，なぜなんでしょうか？著者も浅学なため，深遠な理由は分かりませんが，とにかく微分形式の表現の美しさには感嘆させられるばかりです.

図 1　数学は美しい．驚くほど美しい．美術館に飾れないのが残念だ．