ホッジ作用素を使った公式補足

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-06

外積代数に関して重要な事柄は，ここまでの記事でほとんどですが，ホッジ作用素 に関する公式だけ，少し補足しておきます．

ホッジ作用素を二回作用させる

以下の議論では，空間の向きを保つとします．（つまり，右手系⇔左手系を途中で入れ替えません．）さて，一般のウェッジ積の次数に関し，p ベクトル λ と q ベクトルのウェッジ積 μ について次の関係がなりたちました．（ ウェッジ積について補足 を参照して下さい．）

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda \tag{1}$$

これを基底 σ_k, σ_{n-k} に適用すると次のようになります．ただし，σ_k は $\wedge^k R^n$ の基底，σ_{n-k} は $\wedge^{n-k} R^n$ の基底とします．

$$\sigma_k \wedge \sigma_{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \sigma_{n-k} \wedge \sigma_k \tag{2}$$

一方，ホッジ作用素の定義式より，次式が言えました．空間の計量が分からないので，右辺の内積はそのままにしておきます．

$$\begin{aligned} \sigma_k \wedge \sigma_{n-k} &= (*\sigma_k, \sigma_{n-k}) \sigma_n \\ &= (*\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k}) \sigma_n \end{aligned} \tag{3}$$

式 (3) で k と $n-k$ を入れ替えると次式を得ます．

$$\sigma_{n-k} \wedge \sigma_k = (\sigma_k, \sigma_k) \sigma_n \tag{4}$$

そこで，式 (2)(3)(4) を見比べて，次式が得られます．これは言わば，ホッジ作用素の逆作用を表わす式だと言えます．

$$*\sigma_{n-k} = (-1)^{k(n-k)} (\sigma_k, \sigma_k) \sigma_k \tag{5}$$

式 (3)(5) より，ホッジ作用素を二回連続して作用させる場合の表式を得られます．（いま，基底としては正規直交基底を考えていますので，$(\sigma_k,\sigma_k)(\sigma_{n-k},\sigma_{n-k}) = (\sigma_n,\sigma_n)$ となることに注意して下さい.）

$$\begin{aligned}
**\sigma_k &= *((\sigma_{n-k},\sigma_{n-k})\sigma_{n-k}) \\
&= (\sigma_{n-k},\sigma_{n-k}) * \sigma_{n-k} \\
&= (\sigma_{n-k},\sigma_{n-k})(-1)^{k(n-k)}(\sigma_k,\sigma_k)\sigma_k \\
&= (-1)^{k(n-k)}(\sigma_n,\sigma_n)\sigma_k
\end{aligned} \tag{6}$$

基底の内積 (σ_n,σ_n) は，p-ベクトルの内積 で定義したように，R^n の基底のうち，計量がマイナスとなる基底の個数に応じて ± 1 のどちらかの値を取ります．これで，ホッジ作用素を二連続で作用させた場合の公式が得られました．ボリュームフォームの内積は，R^n の基底で計量を負をするもの（例えばミンコフスキー空間の時間軸）の個数を s として，$(-1)^s$ と書けますので，式 (6) は次のようにまとめられます．（符号定数 t を使って $(-1)^s = (-1)^{\frac{n-t}{2}}$ としても同じです.）

theorem

$**\sigma_k = (-1)^{k(n-k)+s}\sigma_k$

具体例

三次元ユークリッド空間 E^3 で考えましょう．正規直交基底を $\{\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$ と取り，ボリュームフォームを $(\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3}) = 1$ と決めます．このとき，例えば，$\wedge^1 R^3$ の基底 $\boldsymbol{e_1}$ と $\wedge^2 R^3$ の基底 $\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3}$ は，ホッジ作用素によって次のように移されるのでした．（ ホッジ作用素 の記事の具体例で考えました.）

$$*\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3}$$

$$*(\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3}) = \boldsymbol{e_1}$$

公式 (6) は，確かにこの結果を説明しています．

$$\begin{aligned}
**(\boldsymbol{e_1}) &= (-1)^{1(3-1)}(\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3})\boldsymbol{e_1} \\
&= \boldsymbol{e_1}
\end{aligned}$$

ちゃんと元に戻ってきました (^ ^).

一つの定理

ホッジ作用素に関して，もう一つ定理を補足しておきます．$\wedge^k R^n$ に属する二つの元 α,β に対し，次式が成り立ちます．

theorem

$\alpha\wedge *\beta = \beta\wedge *\alpha = (-1)^s(\alpha,\beta)\sigma_n$

proof

α を $A\sigma_k = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{h}_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{h}_k}$ と書くとき，定理の両辺を 0 にしないのは，$*\beta$ の基底が $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{h}_i}$ を含まないときだけです．（ホッジ作用素 の記事を参照して下さい.）このことは，裏を返せば β の基底が σ_k だということです．そこで，$\beta = B\sigma_k$ と書きます．σ_k と，構成する基底を重複しない $\wedge^{n-k}R^n$ の基底を σ_{n-k} と書きます．このとき，$\alpha \wedge *\beta = AB\sigma_k \wedge (\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_{n-k} = AB(\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_n$ と変形できますが，さらに式 (5) を用いて $AB(\sigma_{n-k}, \sigma_{n-k})\sigma_n = AB(\sigma_k, \sigma_k)(-1)^s\sigma_n = (\alpha, \beta)(-1)^{-1}\sigma_n$ と変形されます．これで定理が示されました．■