外微分

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

三次元ユークリッド空間 R^3 上の外積代数を考えると，微分形式として次の 4 つを定義できました．

【零次微分形式】

ただの関数．$f(x,y,z), g(x,y,z)$ など．

【一次微分形式】

$$\omega_1 = f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz \tag{1}$$

【二次微分形式】

$$\omega_2 = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy \tag{2}$$

【三次微分形式】

$$\omega_3 = \Theta(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz \tag{3}$$

それぞれ，1，dx, dy, dz，$dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx$，$dx \wedge dy \wedge dz$ を基底とするベクトルの形になっていることを，もう一度確認して下さい．（零次微分形式はスカラーに相当．）さて，基底の次数別に何次微分形式などと呼び分けていますが，これらは異なる次数の外積空間の元ですので，言ってみれば，違う世界に住んでいるようなものです．

次数の異なる微分形式の間には，どのような関係があるのでしょうか？（まさか何の関係も無いというわけはなさそうですよね．）

外微分

実は，**外微分** という演算によって，次数の異なる微分形式を関係づけることが出来ます．零次微分形式を一回外微分すると一次微分形式，一次微分形式を一回外微分すると二次微分形式，二次微分形式を一回外微分すると三次微分形式という具合に，外微分を行うことで，微分形式は一つ次数が上の微分形式に対応させられます．

---

*1　この段階では，まだ外微分とは何か，具体的に示していませんので，『そのような関係を与える写像を入れることが出来る』というような言い方に留めておいた方が正確でしょう．しかし，すぐに示すように，外微分も，今までよく知っている微分によく似た計算です．

いきなりですが，関数の全微分を求める計算を思い出しましょう．ただの関数は零次微分形式ですから，$\omega_0 = f(x,y,z)$ と置きましょう．この **全微分** が次のように書けることは，既に微積分学でお馴染みだと思います．

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{4}$$

よく見ると，これは一次微分形式の形になっていますね．そこで，関数の全微分を求める計算は，『零次微分形式→一次微分形式』という写像だと考えることも出来るわけです．いまから考える外微分という計算も，関数の全微分を，もっと高次の微分形式にも拡張したものだと考えて下さい．以下の 5 つのルールに基づく演算を **外微分** だと定義します．

definition

1. 0 **次微分形式** $\omega_0 = f$ **に対し，** $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ **とする．**
2. 1 **次微分形式** $\omega_1 = fdx + gdy + hdz$ **に対し，** $d\omega = df \wedge dx + df \wedge dy + df \wedge dz$ **とする．**
3. 2 **次微分形式** $\omega_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ **に対して，** $d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy$ **とする．**
4. 3 **次微分形式** $\omega_3 = \Theta dx \wedge dy \wedge dz$ **に対して，** $d\omega = d\Theta \wedge dx \wedge dy \wedge dz \ (=0)$ **とする．**
5. **任意の次数の微分形式について** $d(d\omega) = 0$ **とする．**

五番目の性質は，ポアンカレの補題 として知られるもので，二回連続で外微分を取れば，どんな微分形式でも零になるという主張です．この性質は，また稿を改めて考えます．まず，一次微分形式の外微分を実際に計算してみましょう．（途中で $dx \wedge dx = 0$, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ などの性質に注意して下さい．）

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= d(f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz) \\
&= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial h}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y}dy \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy
\end{aligned} \tag{5}$$

確かに，$d\omega_1$ は二次微分形式になっていることが分かります．次に，二次微分形式の外微分も計算してみ

[2] 今までの人生で，全微分を計算したことは何度もあると思いますが，『零次微分形式から一次微分形式への写像』をしていたとは気がつかなかったかもしりません．次からは，全微分を見たら一次微分形式だと思ってみましょう．

ます．

$$\begin{aligned}
d\omega_2 &= d(P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy)\\
&= dP\wedge dy\wedge dz + dQ\wedge dz\wedge dx + dR\wedge dx\wedge dy\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\\
&= \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz \qquad (6)
\end{aligned}$$

これは三次微分形式になっています．最後の段で，基底の順列と符号にだけ気をつけてください．では，最後に三次微分形式の外微分が 0 になることを確認してみましょう．

$$\begin{aligned}
d\omega_3 &= d(\Theta(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz)\\
&= d\Theta\wedge dx\wedge dy\wedge dz\\
&= \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \Theta}{\partial y}dy + \frac{\partial \Theta}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz\\
&= 0 \qquad (7)
\end{aligned}$$

三次微分形式の外微分が 0 になるのは，R^3 上の微分形式を考えているからです．一般に，$\wedge^n R^n$ の元の外微分は 0 になります．微分形式の外微分を取ると，微分形式の次数が一つ上がるという点を確認して下さい．

Important

外微分は微分形式の次数を一つ上げます．（写像 $d:\ \wedge^k R^n \longmapsto \wedge^{k+1}R^n$ になっています．）

練習問題

式 (5) と式 (6) にもう一回外微分を施し，$d(d\omega)=0$ が成り立っていることを確認してみて下さい．

全微分の座標不変性

あまり考えたことがなかったかも知れませんが，全微分は座標系によりません．

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

[*3] 式 (4)(5)(6) の成分を見て，grad，rot，div の計算に似ていると思った人はなかなか鋭いです．ベクトル解析に出てきた grad，rot，div が外微分に対応することは，もう一度 grad,div,rot で示します．

もし，適当な座標変換をして $x = x(u, v, z)$，$y = y(u, v, z)$，$z = z(u, v, w)$ と変数変換できるとすれば，合成関数の微分公式により，次のような式変形が可能です．

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}\right)dw \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw
\end{aligned}
$$

これより $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw$ と書くことが出来ます．これはどういうことかと言えば，適当な座標変換 $(x, y, z) \longmapsto (u, v, w)$ の下で，全微分 df が不変だということです．

theorem

全微分は，座標変換に対して不変です．

薄々予想されることですが，全微分の持つこの性質は，全微分を拡張したものである外微分にも引き継がれています．後ほど，外微分の座標不変性 で詳しく考えてみる予定ですので，その準備として，とりあえず全微分の座標不変性を確認しておいて下さい．

*4 もちろん，ここで用いた座標変換とは，(x, y, z) と (u, v, w) を相互に関係付ける，滑らかな（少なくとも C^1 級の）関数による写像を意味しています．あんまり変チクリンな座標変換は考えません．しかし，あとで 微分形式の引き戻し で考えるように，微分形式で考える座標変換は変数の次数が変わる場合（例えば $(x, y) \longmapsto (u, v, w)$ ）でも，写像が滑らかでさえあれば微分形式を不変に保ちます．通常のテンソル解析では同じ次数の可逆な変換（直交変換など）しか考えなかったことと比べると，微分形式の方がかなり自由度が高そうです．