平面のグリーンの定理再考

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

ベクトル解析に，平面のグリーンの定理と呼ばれる定理がありました．

> **theorem**
>
> **【平面のグリーンの定理】 x_1x_2 平面上に単純閉曲線 C と，C に囲まれた領域 D があり，C と D を含む領域で定義された C^1 級の関数 $P(x_1,x_2)$, $Q(x_1,x_2)$ があります．このとき，$\oint\limits_C Pdx_1+Qdx_2=\int\!\!\int\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2$ が成り立ちます．ただし，$\oint$ の向きは反時計回りとします．**

証明や詳細については 平面のグリーンの定理 を参照して下さい．この記事では，この定理を微分形式を使って定式化し直すことを考えます．

微分形式による表現

まず，この問題は二次元ベクトル空間 R^2 上で考えますから，微分形式として出て来るのは零次微分形式（ただの関数），一次微分関数，二次微分関数までです．（三次微分形式以降は零になります．よく分からない人は，もう一度 微分形式 と 外微分 を復習して下さい．）定理の左辺の線積分の中身は，一次微分形式の形をしていますね．それを ω で書くことにします．

$$\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

さて，次に ω の外微分を取ってみましょう．

$$\begin{aligned}d\omega&=dP\wedge dx+dQ\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy\\&=\frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\end{aligned}$$

まだウェッジ積の計算に馴れていない人がいると思いますが，途中で $dx\wedge dx=dy\wedge dy=0$, $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ を使ったことを確認して下さい．$d\omega$ を前出の平面のグリーンの定理と比較してみると，まさに

右辺の形になっていることが分かると思います．また，『周回積分の向きは，反時計回りとする』という注意をわざわざ別に書き添えなくても，積分の向きと微分形式 の議論により，そうした向きの情報も微分形式に含めることが出来ます．安心ですねー．よって，グリーンの定理は，微分形式を使って次のように表現できます．

$$\oint_C \omega = \iint_D d\omega$$

これだけでも十分に簡単で，最初よりもずっと覚えやすい形をしていますが，曲線 C は曲面 D の境界ですから，C を形式的に ∂D と表現すると，もっと綺麗な形に帰着します．せっかくなので，もう一度定理の形に書き下しておきます．

theorem

【平面のグリーンの定理】 ω **を** R^2 **上の一次微分形式** $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ **とすると，** $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$ **が成り立ちます．**

いやー，本当に美しいですね．最初に掲げた定理の表現より，ずっとすっきりしています．しかも，この表現で何が美しいかと言えば，見て分かる通り，被積分関数と積分領域との間に，一種の **双対関係** とも言うべき関係が見えることです．

[*1] 平面のグリーンの定理に関して何よりも重要な性質は，この定理が『座標系の取り方によらない』という事実です．言い換えれば，（微分形式で表現した）平面のグリーンの定理は座標変換しても不変です．そして 外微分の座標不変性 で示したように，外微分による表現は座標系によりませんので，微分形式によって $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$ と書いた表現は座標系によらないわけです．実は，ベクトル解析に出てきたガウスの発散定理，ストークスの定理なども，平面のグリーンの定理と同じであることが徐々に分かってきます．そして，平面のグリーンの定理，ガウスの発散定理，ストークスの定理などは，どれももっと包括的な定理の系であることが示されます．