ガウスの発散定理再考

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

この記事では，ベクトル解析に出てきた ガウスの発散定理 を微分形式の枠組みで考え直します．ガウスの発散定理は，ベクトル形では $\int\int\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \int\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ と書けますが，ここでは $\boldsymbol{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ として，xyz 座標系で成分表示した形から議論を始めます．

theorem

$\int\int\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

微分形式にしてみる

まず，R^3 上の二次微分形式 ω を考えます．

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \tag{1}$$

また，ω の 外微分 を求めておきます．もう，外微分の途中計算は省略します．

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \tag{2}$$

領域 V を D と書き直し，V の境界（表面）である S を ∂D と命名することにします．これは，名前の付け替えに過ぎません．さて，式 (1)(2) と，この新しい名前に従うと，ガウスの発散定理の両辺は次のように書き換えることができます．

$$\int_{\partial D} d\omega = \int_D \omega \tag{3}$$

微分形式で表現すると，かなりすっきりと表現できました．ところで，私達は 平面のグリーンの定理再考 で，平面のグリーンの定理 も微分形式を使って書き直してみました．その表現は，次のようになるのでした．

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \tag{4}$$

なーんと，これは式 (3) とまったく同じ形をしています！！つまり，これらは（ ω の階数に違いはありますが）どうやら同じ定理だったと考えることが出来そうです．

もちろん，まだ形が同じだからと言って，同じ定理なのだと断定することは出来ませんが，そのことは多様体を勉強したあとできちんと証明する予定です．平面のグリーンの定理，ガウスの発散定理と来れば，次 はストークスの定理ですね．この調子で，とりあえず ストークスの定理 も微分形式で書き直してみましょう o(^ ^)o.

[*1] ベクトル解析を勉強したとき個別に覚えていた定理に，微分形式によって統一的視点が与えられました．数学は，レベルが上がってくると，覚えることが減っていくようです．カリスマ収納上手主婦も，数学を勉強すれば，きっともっと収納上手になれることでしょう．なんのこっちゃ．