

ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の応用

泉屋 周一

北海道大学・大学院理学研究科

e-mail: izumiya@math.sci.hokudai.ac.jp

平成 15 年 1 月 11 日

概要

ここでは、ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の応用として、概説文 [3] の内容の一部を筆者の研究や最近の興味をからめて解説する。

1 序

ラグランジュ・ルジャンドル特異点論はもともと、幾何光学、線形偏微分方程式の漸近理論、一階偏微分方程式論、波力学などを源としている。基礎理論の解説でも明らかにされたように、Hörmander や Duistermaat により開発され、Arnol'd や Zakalyukin により整備された母関数族 (Generating family) の概念がここでは中心的な役割を担う [1, 5]。一方、もともと物理学とは非常に密接に関連していたラグランジュ・ルジャンドル特異点論ではあるが、物理学者にとっては理解しやすい対象とはいえないようである。そこで、宇宙物理学者である Ehlers と Newman は概説文 [3] で、基礎理論も含めた物理学への応用について「物理学者向け」の解説を行っている。ここでは、主としてこの概説文の物理学への応用部分を筆者の研究上の興味を交えて解説し、数学的な立場から関連する筆者の研究についてもあわせて解説することを試みる。数学的にはすでに良く知られていることも多々あるが、物理学からの見方や新たな研究のための動機付けが得られる可能性があると思われる。

2 質点系の運動方程式からの例

余接空間 $T^*\mathbb{R}$ におけるハミルトン関数 $H = (1/2)p^2$ によって定まる質点の集まりの自由運動について考える。ただし、 $T^*\mathbb{R}$ の標準座標を (x, p) 対応するシンプレクティック構造を $\omega = dp \wedge dx$ とする。直接的には $x = x_0 + tp$ がその運動であるとも理解できるが、ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0$$

の解であると理解する。ここで、 $T^*\mathbb{R}$ 内にラグランジュ多様体を与える初期運動量として $p = 1/(1+x^2)$ を考えると、 $p = \partial S/\partial x$ なので、初期作用関数 (速度ポテンシャル) は $S_0 = \tan^{-1} x$

である。単純な物理的解釈としては、早い動きは遅い動きを追い越していくので運動量は多価にかわるはずである。多価性が現れたり、消えたりする瞬間はラグランジュ多様体の配置空間 \mathbb{R} への射影の特異点を見つけることに対応している。ここで、初期状態における位置は $x = x_0 \pm \sqrt{p^{-1} - 1}$ で与えられ、質点の運動方程式は $g_{\pm} = x - pt - x_0 = x - pt \mp \sqrt{p^{-1} - 1} = 0$ で与えられる。この方程式は関数 $p(x, t)$ を帯 $0 \leq t < \frac{8}{9}\sqrt{3} \equiv t_c$ で定める。この関数をつかうと、時間に依存したハミルトン・ヤコビ方程式の解

$$S(x, t) = \frac{1}{2}p^2t + \tan^{-1}(x - pt),$$

が上記の帯上に存在する、ただし、 $p(x, t)$ は前記の方程式 $g_{\pm} = 0$ で定められた関数である。

すべての時間 t において、質点の状態 (x, t) は $g_+g_- = 0$ の解である 3 次曲線

$$p(x - pt)^2 + p - 1 = 0$$

で与えられるが、これは相空間 (x, p) 内において、ラグランジュ多様体の族 $L(t)$ を与える。ここで、 $0 \leq t < t_c$ 内では、 $L(t)$ は関数 $S(x, t)$ で生成される。言い換えると $x = x, p = \partial S / \partial x(x, t)$ が成り立つ。しかし、 $t > t_c$ では、ある開区間 $x_1(t) < x < x_2(t)$ 上では方程式 $p(x - pt)^2 + p - 1 = 0$ は 3 つの解を持つ。言い換えると、 $L(t)$ は 2 つのホールド特異点を持つ。ホールド特異点の周りでは最早 $L(t)$ は $S(x, t)$ では生成されない。しかし、ホールド特異点の周りでは、新たな母関数 $G(p, t)$ を与えることができる。まず $t < t_c$ において、ルジャンドル変換

$$G(p, t) = S(x, t) - px = -\frac{1}{2}p^2t + \tan^{-1}(\sqrt{p^{-1} - 1}) - p\sqrt{p^{-1} - 1}$$

によって $x > t$ の範囲で母関数を考えそれを $t \geq t_c$ に延長する。この時、 $L(t)$ は、特異点を含む領域で

$$x = -\frac{\partial G}{\partial p} = pt + \sqrt{p^{-1} - 1}, \quad p = p$$

で与えられる。この最初の式は $L(t)$ の x 軸への射影であると解釈できる。従って、ホールド特異点は

$$\frac{dx}{dp} = 0 = t - \frac{1}{2p^2\sqrt{p^{-1} - 1}}$$

で与えられる。この方程式は

$$f(p, t) \equiv p^4 - p^3 + \frac{1}{4t^2} = 0$$

と書き換えられる。 $f(p, t)$ を p 変数の関数とみなすと $p = 3/4$ で最小となり 2 重極値を持つ変曲点を $p = 0$ で持つ。ここで、 $t < t_c \equiv \frac{8}{9}\sqrt{3}$ における最小値 $f(3/4, t)$ は正であり従って $f(p, t)$ は決して零にはならない。一方 $t > \frac{8}{9}\sqrt{3}$ では常に 2 つの解をもつ；一つは 0 と 3/4 の間にあり、もう一つは 3/4 と 1 の間にある。 t を無限大にすると、この 2 つの解はそれぞれ 0 と 1 に近づくことが解る。それらの特異点に対応した x の値が t に依存して右方向へ移動してくコースティックである。

前にも述べたように、これは物理的には初期運動量を与えられた質点の集まりが右方向へ動く様子をモデル化した例である。時間が経過したあと、早く動くものが遅く動くものに追い付

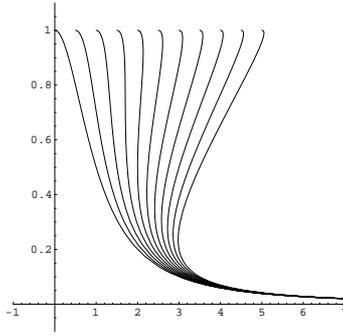


図 1

き 2 つのコースティックをもち 3 価の関数となる (図 1)。2 つのコースティックがあらわれたあとでは、その特異点はホールド特異点であり、それは安定なラグランジュ特異点である。しかし、2 つのコースティックがあらわれる瞬間の特異点は不安定なラグランジュ特異点であり、分岐点 (ペレストロイカ点) と呼ばれる。

一方、数学的には以下のように考えた方が解りやすい。我々のハミルトン・ヤコビ方程式を少々一般化してコーシー問題

$$(H) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \quad (t > 0) \\ y(0, x) = \phi(x), \end{cases}$$

と解釈する。我々の場合は $H(p) = p^2/2$ 、 $\phi(x) = \tan^{-1} x$ である。今、このコーシー問題を古典的な特性曲線の方法によって解いてみる。特性曲線の方法とは、偏微分方程式の解をある種の常微分方程式をとくことによって得ると言う手法であり、数々ある 1 階偏微分方程式の解法の中では最も古典的なものの一つである。今、(H) は (t, x, y, s, p) を座標として持つ 5 次元空間 \mathbb{R}^5 内の関係式 $s + H(p) = 0$ と曲線

$$\gamma(u) = (0, u, \phi(u), -H(\phi(u)), \phi'(u))$$

の組であると考えられる。ただし、この 5 次元空間の座標において、 t, x は微分方程式の独立変数に対応し、 y は未知関数に、さらに s, p は 1 階の偏微分係数に対応しているとみなす。これが、コーシー問題 (H) の幾何学的解釈である。このとき、曲線 $\gamma(u)$ を初期曲線 (多様体) と呼ぶ。ここで、(H) の滑らかな解 $y = f(t, x)$ が存在すると仮定した時、5 次元空間内に対応する「グラフ」

$$G(f) = \left\{ \left(t, x, f(t, x), \frac{\partial f}{\partial t}(t, x), \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right) \right\}$$

が考えられる。特性曲線の方法は (H) の解そのものよりも、5 次元空間内の「グラフ」を構成することを目的とする。初期曲線 $\gamma(u)$ から出発する、曲線の族

$$\Gamma(\tau, u) = (\tau, x(\tau, u), y(\tau, u), s(\tau, u), p(\tau, u))$$

を考える。ここで、仮定から、 $\Gamma(0, u) = \gamma(u)$ をみたしている。さらに、初期曲線 $\gamma(u)$ は $t = 0$ によって定められた 4 次元空間内に属し、方程式 (H) は時間発展型なので、径数 τ を座標関数 t

と同一視する事ができる。ここで、この曲線族が形成する \mathbb{R}^5 内の曲面が (H) の解の「グラフ」となるために、変数 τ に関して満たすべき常微分方程式を求めてみる。(H) の解であることより関係式 $s(\tau, u) + H(p(\tau, u)) = 0$ を満たさなければならない。従って、両辺の微分をとる事により、関係式

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial s}{\partial \tau} + H'(p(\tau, u)) \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial u} + H'(p(\tau, u)) \frac{\partial p}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

を得る。また、座標 (t, x, y, s, p) において、 y が未知関数に対応しているという条件より、関数の全微分可能性をあらわす関係式 $dy(\tau, u) - p(\tau, u)dx(\tau, u) - s(\tau, u)du = 0$ を満たす。言い換えると

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \tau} = p(\tau, u) \frac{\partial x}{\partial \tau} + s(\tau, u) \\ \frac{\partial y}{\partial u} = p(\tau, u) \frac{\partial x}{\partial u} \end{cases}$$

である。さらに、もう一度、外微分をとることにより、 $dp(\tau, u) \wedge dx(\tau, u) + ds(\tau, u) \wedge d\tau = 0$ を得る。言い換えると、

$$\frac{\partial s}{\partial u}(\tau, u) = \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, u) \frac{\partial x}{\partial u}(\tau, u) - \frac{\partial p}{\partial u}(\tau, u) \frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau, u)$$

となる。この式を (*) の 2 番目の式に代入すると、満たすべき関係式は

$$\frac{\partial p}{\partial u}(\tau, u) \left(H'(p(\tau, u)) - \frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau, u) \right) + \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, u) \frac{\partial x}{\partial u}(\tau, u) = 0$$

となり、この関係式を満たすためには $x(\tau, u), p(\tau, u)$ が方程式 $x'(\tau, u) = H'(p(\tau, u)), p'(\tau, u) = 0$ を満たせば良い。ただし、 x' は x の τ 変数に関する微分係数をあらわす。さらに、(*) の 1 番目の式から、 $s'(\tau, u) = 0$ が (**) の 1 番目の式より、 $y'(\tau, u) = -H(p(\tau, u)) + p(\tau, u)H'(p(\tau, u))$ が従う。この常微分方程式を (H) の特性曲線の方程式と呼ぶ。それは、5 次元空間上の常微分方程式

$$t'(\tau) = 1, x'(\tau) = H'(p(\tau)), y'(\tau) = -H(p(\tau)) + p(\tau)H'(p(\tau)), p'(\tau) = 0, s'(\tau) = 0$$

の事である。また初期曲線 $\gamma(u) = \Gamma(0, u)$ に対応して、初期条件 $t(0) = 0, x(0) = u, y(0) = \phi(u), p(0) = \phi'(u), s(0) = -H(p(0))$ を考えると解は

$$t(\tau, u) = \tau, x(\tau, u) = u + \tau H'(\phi'(u)), y(\tau, u) = \tau \{-H(\phi'(u)) + \phi'(u)H'(\phi'(u))\} + \phi(u), \\ p(\tau, u) = \phi'(u), s(\tau, u) = -H(\phi'(u))$$

である。ここで、この特性方程式の解を特性曲線と呼ぶがその性質を調べてみよう。この特性曲線から埋め込み写像 $L_\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ が $L_\phi(\tau, u) = (\tau, x(\tau, u), y(\tau, u), -H(p(\tau, u)), p(\tau, u))$ と定義される。また、独立変数である (t, x) 空間への射影 π_2 との合成 $\Phi(\tau, u) = \pi_2 \circ L_\phi(\tau, u) = (\tau, x(\tau, u))$ のヤコビ行列は $1 + \tau H''(\phi'(u))\phi''(u) = 0$ なる点 (t, u) で退化していることがわかる。そこで、点 (τ_0, u_0) で $1 + \tau H''(\phi'(u))\phi''(u) \neq 0$ をみたとする。この時、逆写像の定理から、 Φ の逆写像

$\Psi(t, x)$ が $(\tau_0, u_0 + \tau_0 H'(\phi'(u_0)))$ の近くで存在するが、それは $\Psi(t, x) = (t, \psi(t, x))$ という形をしている。さらに、 $g(t, x) = y(t, \psi(t, x))$ とおくと $g(t, x)$ の偏微分は $\frac{\partial g}{\partial t} = -H(\phi'(u))$, $\frac{\partial g}{\partial x} = \phi'(u)$, となるのが計算でわかる、ただし、 $(t, x) = (\tau, u + \tau H'(\phi'(u)))$ である。このとき、 g は明らかにハミルトン-ヤコビ方程式の解である。したがって、時間 t が初期条件から十分短い間は前記の条件を満たしているので、微分可能な解 (古典解) が存在することがわかる。

ここで、我々の場合に上記の特性曲線を求めると、

$$t(\tau, u) = \tau, \quad x(\tau, u) = u + \frac{\tau}{1+u^2}, \quad y(\tau, u) = \frac{\tau}{2(1+u^2)^2} + \tan^{-1} u,$$

$$p(\tau, u) = \frac{1}{1+u^2}, \quad s(\tau, u) = \frac{-1}{2(1+u^2)^2}$$

となる。この時、余接束 $T^*\mathbb{R}$ 上のラグランジュ曲線族 $(x(\tau, u), p(\tau, u))$ の図は図 2 のようになり、以前に描いた図 1 と同じものとなる事が解る。また、各 u を固定すると、 $(x(\tau, u), \tau)$ は (x, t)

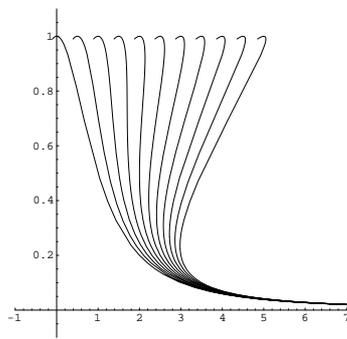


図 2

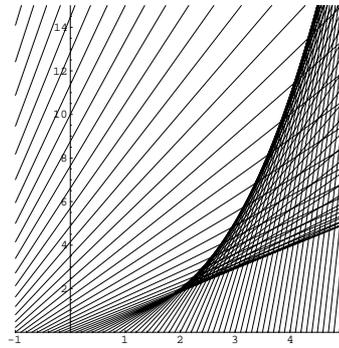


図 3

平面上に直線族を描く (図 3)。それぞれの直線が我々の場合の特性曲線である。この曲線族の包絡線が (x, t) 平面上に描かれたコースティックである。実は、 $\mathbb{R}^5, (x, t, y, p, s)$ 上に標準 1 形式 $dy - p dx - s dt$ を考えて接触多様体とみなすと、埋め込み写像 $L_\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ はルジャンドル部分多様体であり、その 4 次元空間 $\mathbb{R}^4, (x, t, s, p)$ への射影はラグランジュ部分多様体となる事がわかる。ただし、シンプレクティック構造は $dp \wedge dx + ds \wedge dt$ で与える。じっさい、図 1 におけるカスプ曲線は前記の写像 $\Phi(\tau, u)$ のヤコビ行列が退化した点に対応していて、カスプの先端の手前までは Φ には逆写像が存在する。この点に対応した時間が $t_c \equiv \frac{8}{9}\sqrt{3}$ である。

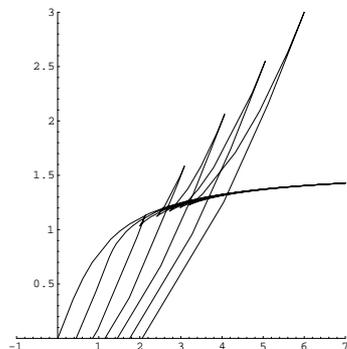


図 4

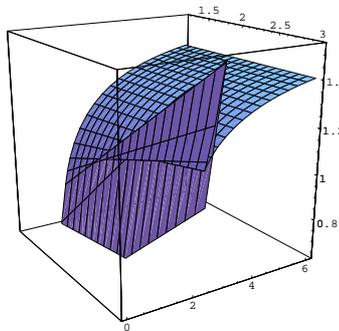


図 5

一方、 τ を止める事にあらわれる曲線族 $(x(\tau, u), y(\tau, u))$ は解のグラフの時間変化に対応している (図 4)。さらに、 $(\tau, x(\tau, u), y(\tau, u))$ を空間内の曲面として描くと、解のグラフが描かれ、これは 2 次元の安定な波面集合と知られているツバメの尾であることが解る (図 5)。

3 4次元時空内の光が構成する超曲面の特異点

この節では、単純だが大切な物理モデルについて、解説する。4次元ミンコフスキー空間 \mathbb{R}_1^4 を考える。ただし、座標は (t, x^1, x^2, x^3) で与えられ、ローレンツ計量は $ds^2 = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ で与えられるものとする。このとき、 $t = const$ にたいして、空間的超曲面 $\Sigma_t = \mathbb{R}^3$ が定まる。 $t = 0$ として $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3$ 内の任意の曲面 S を光源とする。ここで、 S は $x(s^1, s^2) = (x^1(s^1, s^2), x^2(s^1, s^2), x^3(s^1, s^2))$ と径数付けられていると仮定する。 $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ は物理的空間の点 (観測点) であり、そこには S から輝く光が到達する。それぞれの時間 t において、 S の外部へ出ていく光線と内部に入っていく光線でみたされる領域が境界として対応する 2 つの (小) 波面集合 (small wave front) を持つ。4次元時空では時間 t が発展するにつれて、これらの波面集合が光的超曲面 (大波面) (big wave front) を形成する。これら 2 つの光的超曲面の共通部分が S である。ここでは、これらの (小) 波面集合の求め方について解説する。

関数 $t = \mathfrak{F}(x^1, x^2, x^3, s^1, s^2)$ が S から出る光が観測点 x_i までに到達する時間を表すものとする。この関数は光速度を $c = 1$ とすると

$$t = \mathfrak{F}(x^1, x^2, x^3, s^1, s^2) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i - x_0^i(s^1, s^2))^2}$$

で与えられる。これはまた

$$\mathfrak{F} = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s^1, s^2)) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s^1, s^2))}$$

とも書かれる。ただし、 \cdot は \mathbb{R}^3 における標準内積を表す。この \mathfrak{F} を母関数族とするようなラグランジュ多様体を以下の様に与える：考えているシンプレクティック多様体は、6次元空間 (\mathbf{r}, \mathbf{p}) であり、今 $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ なので、余接束 $T^*\mathbb{R}^3$ である。この時、関係式

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s^1, s^2))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s^1, s^2)|}$$

と

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial s^j} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s^1, s^2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s^1, s^2)|} \cdot \mathbf{T}_j = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{T}_j = 0$$

がラグランジュ部分多様体を定める。ただし、 $\mathbf{T}_j(s^1, s^2) = \partial \mathbf{r} / \partial s^j$ は 2 つの接ベクトルである。この後の方の条件は、物理的には光りの到達時間に $t = \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0(s^1, s^2))$ の極値が対応していることを意味している。ここで、曲面 S の単位法線ベクトルを

$$\mathbf{n}(s^1, s^2) = \frac{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2}{|\mathbf{T}_1| |\mathbf{T}_2|}$$

で定義すると、前記の条件は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s^1, s^2) + v\mathbf{n}(s^1, s^2)$$

と書き表わされる。この時、 $\mathbf{p} = \mathbf{n}(s^1, s^2)$ となる。言い換えると運動量は曲面 S の単位法線である。ある固定された実数 v に対して、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s^1, s^2) + v\mathbf{n}(s^1, s^2)$ は外部及び内部へ出ていく (小) 波面集合 (微分幾何学では、 S の平行曲面) を定める。

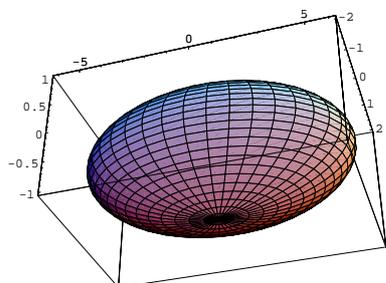


図 6

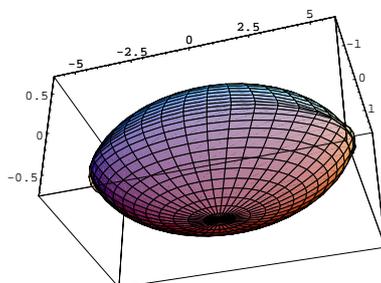


図 7

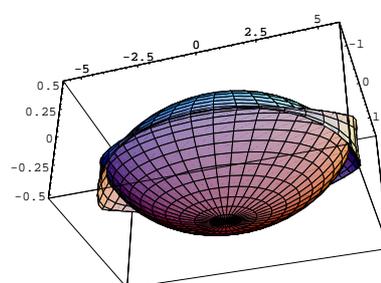


図 8

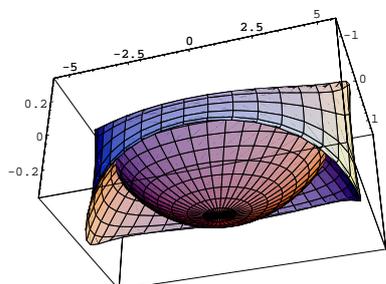


図 9

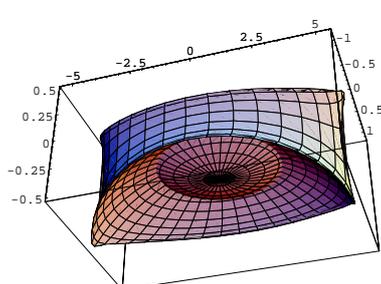


図 10

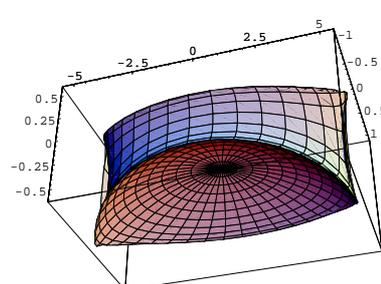


図 11

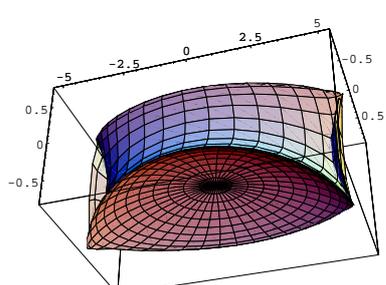


図 12

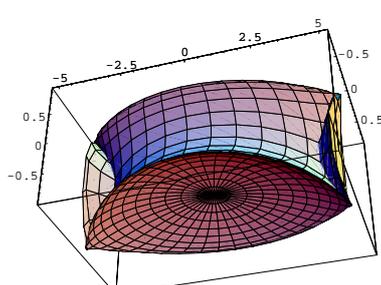


図 13

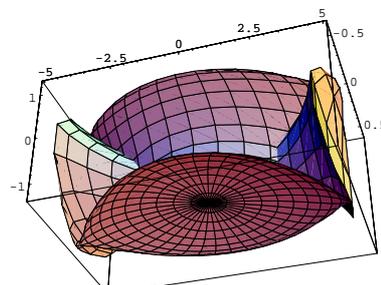


図 14

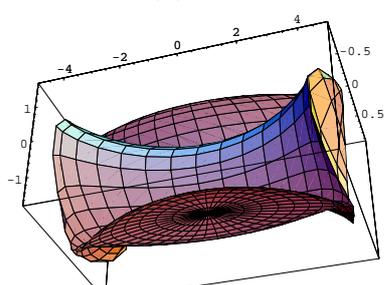


図 15

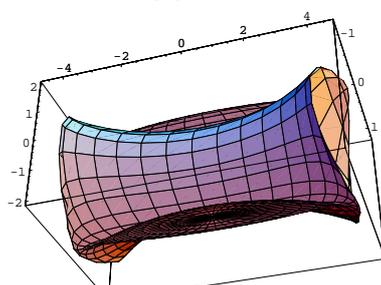


図 16

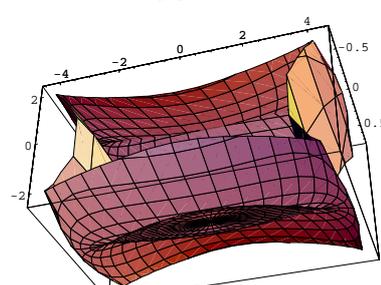


図 17

この (小) 波面集合は、十分大きな $|v|$ に対しては、特異点を派生させる。実際、楕円面から内側に出る (小) 波面の図を描くとツバメの尾があらわれる事が解る (図 6、7、8)。さらに $|v|$ を大きくしていくと、それらがつながり、新たなツバメの尾を派生させさらにツバメの尾が

消滅したりする事が解る(図9、10、11、12、13、14、15、16、17)。平面上の閉曲線の場合は単純で、ジェネリックで凸な閉曲線から出る(小)波面集合は必ず4つ以上のカスプ点を持つことが解る。この現象はより一般の状況でも成り立つことがアーノルドによって予想され、チェカノフとプシュカールによって解かれたが、平面曲線の場合でさえ非常に大変な証明である。ましてや、空間内の曲面の場合には現在のところ全く手がつけられていないのが現状らしい。

この構成をルジャンドル部分多様体へ拡張するには、接触多様体として、7次元空間 (r, t, p) を考える。これは、1ジェット空間 $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \equiv T^*\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ とみなすことができる。ここで、ラグランジュ多様体は

$$r = r_0(s^1, s^2) + vn(s^1, s^2), p = n(s^1, s^2)$$

で与えられ、対応するルジャンドル多様体は

$$r = r_0(s^1, s^2) + vn(s^1, s^2), t = v, p = n(s^1, s^2)$$

で与えられる3次元の部分多様体である。

ラグランジュ特異点論より、ラグランジュ写像の特異点は母関数族の言葉により、条件

$$D = \det \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial s^j \partial s^k} \right) = 0$$

で表される。曲面 S の $g_{jk} = T_j \cdot T_k$ (第一基本形式) と $h_{jk} = n(s^1, s^2) \cdot (\partial T_k / \partial s^j)$ (第二基本形式) を用いると、直接的な計算によって、

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial s^j \partial s^k} = v^{-1}(g_{jk} - vh_{jk})$$

が成り立つ。この式から、ラグランジュ写像の特異点は

$$v^2 D = g + v(g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}) + v^2 h = 0$$

をみたす点 $v = |r(s^1, s^2) - r_0(s^1, s^2)|$ であることが解る。ここで、 $g = \det(g_{jk})$, $h = \det(h_{jk})$ とする。ここで、この方程式をみたす二つの解 $v_1(s^1, s^2)$, $v_2(s^1, s^2)$ は、曲面の古典的微分幾何学では曲面 S の二つの主曲率中心として知られている。従って、 \mathbb{R}^3 内の曲面から法線方向へ出る光線の作るコースティックはその曲面の主曲率中心の軌跡であることが解る。それらは

$$r(s^1, s^2) = r_0(s^1, s^2) + v_1(s^1, s^2)n(s^1, s^2), \quad r(s^1, s^2) = r_0(s^1, s^2) + v_2(s^1, s^2)n(s^1, s^2)$$

で与えられる。言い換えると2つの特異点を持つような曲面からなる。これら二つの曲面は $v_1(s^1, s^2) = v_2(s^1, s^2)$ をみたす点(曲面 S の臍点)で互いにぶつかる。ジェネリックには、臍点におけるコースティックの特異点は(双曲的、楕円の)臍特異点(または、財布、ピラミッド)として知られている。ジェネリックにはコースティックにあらわれるその他の特異点はカスプ状曲面、ツバメの尾であることが知られている。これらの特異点に対応する曲面 S の微分幾何学的性質については[12]を参照していただきたい。

一方、この状況を偏微分方程式の立場から考えてみる、ミンコフスキー空間内のアイコナル方程式

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = 0$$

を考える。この時、余接空間 $T^*(\mathbb{R}_1^4)$ における座標を $((t, x_1, x_2, x_3), (\sigma, p_1, p_2, p_3))$ とすると、 $\sigma = \partial S / \partial t$, $p_i = \partial S / \partial x_i$ と解釈できるので、アイコナル方程式は余接空間内の 2 次超曲面

$$H(t, \mathbf{x}, \sigma, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(-\sigma + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(-\sigma^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 0$$

である。ここでこの 2 超曲面は、零切断 $\mathbb{R}_1^4 \times \{0\}$ で特異点を持ちそれ以外では滑らかな超曲面となる。また、1 次形式

$$\theta = -\sigma dt + \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}$$

の $H^{-1}(0)$ 上への制限により、 $H^{-1}(0)$ は滑らかな部分で接触多様体となることがわかる。

ここで、 $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (0, x_1, x_2, x_3) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ における前記の曲面 S とその単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s^1, s^2)$ を考えると余接空間内の曲面

$$\ell(s^1, s^2) = (0, \mathbf{r}_0(s^1, s^2), 1, \mathbf{n}(s^1, s^2))$$

は明らかに 2 次超曲面 $H^{-1}(0)$ の部分集合である。また、 $\mathbf{n}(s^1, s^2)$ は曲面 S の法線ベクトルなので、 $\ell^*\theta = \mathbf{n}(s^1, s^2) \cdot d\mathbf{r}_0(s^1, s^2) = 0$ が成り立つ。この意味するところは曲面 $\ell(s^1, s^2)$ が $H^{-1}(0)$ 上の接触構造の積分多様体となっていることである。さらに、ハミルトン関数 H から決まるハミルトンベクトル場は曲面 $\ell(s^1, s^2)$ に沿って

$$-\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n}(s^1, s^2) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

で与えられるので、この曲面を初期多様体とするコーシー問題が与えられる。この時、余接空間 $T^*\mathbb{R}_1^4$ の 3 次元部分多様体

$$L(v, s^1, s^2) = (v, \mathbf{r}_0(s^1, s^2) + v\mathbf{n}(s^1, s^2), 1, \mathbf{n}(s^1, s^2))$$

を考えると、 $\mathbf{n}(s^1, s^2)$ は単位ベクトルなので、 $\mathbf{n}(s^1, s^2) \cdot d\mathbf{n}(s^1, s^2) = 0$ が成り立ち、関係式

$$L^*\theta = -dv + \mathbf{n}(s^1, s^2) \cdot d\mathbf{r}_0(s^1, s^2) + dv + \mathbf{n}(s^1, s^2) \cdot d\mathbf{n}(s^1, s^2) = 0$$

を得る。また、Image L は明らかに $H^{-1}(0)$ の部分集合である。このことは、 L がアイコナル方程式 $H = 0$ のルジャンドル解であることを意味している。ここでは、ルジャンドル解 $L(v, s^1, s^2)$ を具体的に与えたが、特性曲線の方法を用いて構成しても同じルジャンドル解を得ることができる。さらには、特性曲線の方法を用いれば、ミンコフスキー空間とは限らず、一般のローレンツ多様体の計量からきまるアイコナル方程式のルジャンドル解も構成できる。この場合の(小)波面の特異点の分岐(ペレストロイカ)も同様に分類することが出来る。また、これらのルジャンドル解は光的超曲面であるが、すべての光的超曲面が \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面を初期多様体として構成できるわけではない([15, 16])。

さらに、ここで考えた曲面 S を \mathbb{R}^3 内にあるもののみならず、ミンコフスキー空間 \mathbb{R}_1^4 内の空間的曲面に一般化することにより、一般の光的超曲面の幾何的性質を調べることができる([9, 10, 11, 15, 16])。

4 ミンコフスキー空間内の空間的曲面の微分幾何学と光的超曲面

ここでは、記述を統一的に扱うためにミンコフスキー空間の座標を (x_1, x_2, x_3, x_4) で表す。即ち $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ に対して、擬内積を $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ と定義し、 $\mathbb{R}_1^4 = (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を (4次元)ミンコフスキー空間と呼ぶ。このとき、ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^4 \setminus \{0\}$ が空間的, 光的 or 時間的 とはそれぞれ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, = 0$ または < 0 を満たす事とする。ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^4$ のノルムは $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$ で定義される。

$X : U \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ を正則曲面 (はめ込み) とする。ただし、 $U \subset \mathbb{R}^2$ は開集合 (または、2次元多様体) とする。 $M = X(U)$ と表す。さらに、 M が 空間的曲面 とはその接空間 T_pM が任意の点 $p \in M$ で空間的ベクトルのみからなる時にいう。この場合、法空間 N_pM は時間的平面 (i.e., ロレンツ平面) となる。(cf., [22]). $\{e_3(x, y), e_4(x, y); p = (x, y)\}$ を接空間 T_pM の正規直交枠として $\{e_1(x, y), e_2(x, y); p = (x, y)\}$ を法空間 N_pM の擬正規直交枠とする。ただし、 $e_1(p)$ は時間的で $e_i(p); i = 2, 3, 4$ は空間的と選んでおく。空間的曲面の微分幾何学的不変量を構成するために、Little [19] と類似の考察を行う。 X, e_i の微分を $dX = \sum_{i=1}^4 \omega_i e_i$ かつ $de_i = \sum_{j=1}^4 \omega_{ij} e_j; i = 1, 2, 3, 4$ と書き表わす。このとき、 $\omega_i = \delta(e_i) \langle dX, e_i \rangle$ かつ $\omega_{ij} = \delta(e_j) \langle de_i, e_j \rangle$ と書かれる。ただし、

$$\delta(e_i) = \text{Sign}(e_i) = \begin{cases} 1 & i = 2, 3, 4 \\ -1 & i = 1 \end{cases}$$

この時、以下のコダッチ型の方程式を得る：

$$\begin{cases} d\omega_i = \sum_{j=1}^4 \delta(e_i) \delta(e_j) \omega_{ij} \wedge \omega_j \\ d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^4 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \end{cases}$$

ここでは d 外微分を表す。さらに、

$$\omega_{ij} = -\delta(e_i) \delta(e_j) \omega_{ji}.$$

が成り立ち、特に $\omega_{ii} = 0; i = 1, 2, 3, 4$ を得る。

$\langle dX, e_1 \rangle = \langle dX, e_2 \rangle = 0$ から、 $\omega_1 = \omega_2 = 0$. が成り立ち、結果として以下を得る：

$$\begin{cases} 0 = d\omega_1 = \sum_{j=1}^4 \delta(e_1) \delta(e_j) \omega_{1j} \wedge \omega_j = \sum_{j=3}^4 \delta(e_j) \omega_{1j} \wedge \omega_j = -\omega_{13} \wedge \omega_3 - \omega_{14} \wedge \omega_4 \\ 0 = d\omega_2 = \sum_{j=1}^4 \delta(e_2) \delta(e_j) \omega_{2j} \wedge \omega_j = \sum_{j=3}^4 \delta(e_j) \omega_{2j} \wedge \omega_j = \omega_{23} \wedge \omega_3 + \omega_{24} \wedge \omega_4. \end{cases}$$

カルタンの補題から、ある関数 a, b, c, e, f, g が存在して

$$\begin{cases} \omega_{13} = a\omega_3 + b\omega_4, \omega_{14} = b\omega_3 + c\omega_4 \\ \omega_{23} = e\omega_3 + f\omega_4, \omega_{24} = f\omega_3 + g\omega_4. \end{cases}$$

が成り立つ。

一方、以下の集合を定義する： $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}_1^4$ に対して、

$$LC_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^4 \mid \mathbf{x} = -(x_1 - p_1)^2 + \sum_{i=2}^4 (x_i - p_i)^2 = 0\}$$

とおき、

$$S_+^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in LC_0 \mid x_1 = 1\}$$

とおく。 S_+^2 を (未来)空間的単位球面と呼び $LC_p^* = LC_p \setminus \{p\}$ を p における開光錐と呼ぶ。さらに

$$LC_+^* = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in LC_0^* \mid x_1 > 0\}$$

を (原点における) (未来的)光錐と呼ぶ。任意の光的ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ に対して、

$$\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1},) \in S_+^2.$$

が定まる。

今、任意に与えられた法ベクトル $\mathbf{v} = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 \in N_p M$ に対して、 $d\mathbf{v} = d\xi \mathbf{e}_1 + \xi d\mathbf{e}_1 + d\eta \mathbf{e}_2 + \eta d\mathbf{e}_2$ となり、従って

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle \wedge \langle d\mathbf{v}, \mathbf{e}_4 \rangle &= [(a\xi + e\eta)(c\xi + g\eta) - (b\xi + f\eta)^2] \omega_3 \wedge \omega_4 \\ &= [(ac - b^2)\xi^2 + (ec + ag - 2bf)\xi\eta + (eg - f^2)\eta^2] \omega_3 \wedge \omega_4. \end{aligned}$$

となる。ここで曲率関数 \mathcal{K}_l を以下のように定める：

$$\mathcal{K}_l(\mathbf{v})(p) = \mathcal{K}_l(\xi, \eta)(p) = (ac - b^2)\xi^2 + (ec + ag - 2bf)\xi\eta + (eg - f^2)\eta^2.$$

また、平均曲率ベクトル \mathfrak{h} を

$$\mathfrak{h}(p) = \frac{1}{2}(a + c)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}(e + g)\mathbf{e}_2.$$

と定める。一方、超曲面の対

$$LH_M^\pm : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$$

を

$$LH_M^\pm(p, u) = LH_M^\pm(x, y, u) = \mathbf{X}(x, y) + u(\widetilde{\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2})(x, y),$$

と定義する。ただし $p = \mathbf{X}(x, y)$. この超曲面 LH_M^\pm を M に沿った光的超曲面と呼ぶ。

[10, 15, 16] では M の光的ガウス写像 $LG_M^\pm : M \longrightarrow S_+^2$ を $LG_M^\pm(x, y) = \widetilde{\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2}(x, y)$ と定義し、点 $p_0 = \mathbf{X}(x_0, y_0)$ が LG_M^\pm の特異点であるための必要十分条件が $\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0) = 0$ であることを示した。光的超曲面の特異点に関しては以下が成り立つ：

命題 4.1 $p_0 = \mathbf{X}(x_0, y_0) \in M$ を $\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0) = 0$ なる点とする。このとき、光的超曲面 LH_M^\pm は任意の点 $u_0 \in \mathbb{R}$ に対して点 (p_0, u_0) において非特異である。

従って、 $\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0) = 0$ なる点 (光的ガウス写像の特異点) 意外の点で特異点を持ち、今後そのような点のみを考える。

次に空間的曲面 $M = \mathbf{X}(U)$ 上の関数族

$$G : M \times \mathbb{R}_1^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$G(p, \boldsymbol{\lambda}) = G(x, y, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{X}(x, y) - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{X}(x, y) - \boldsymbol{\lambda} \rangle,$$

と定義する。ただし、 $p = \mathbf{X}(x, y)$ 。この G を空間的曲面 M 上の口 - レンツ距離 2 乗関数と呼ぶ。 $\lambda_0 \in \mathbb{R}_1^4$ を固定したとき、 $g(p) = G_{\lambda_0}(p) = G(p, \lambda_0)$ と書くと以下の命題が成り立つ：

命題 4.2 M を空間的曲面で点 $p_0 \in M$ で $\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0) \neq 0$ を満たすものとする。今、 $G : M \times \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を M 上の口 - レンツ距離 2 乗関数とし、 $p_0 \neq \lambda_0$ のとき、以下が成り立つ：

$$(1) \quad g(p_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) = 0 \iff \text{ある } \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ に対して、} p_0 - \lambda_0 = \mu(\widetilde{e_1 \pm e_2})(p_0).$$

$$(2) \quad g(p_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) = \det \mathcal{H}(g)(p_0) = 0 \quad (\det \mathcal{H}(g)(p_0) \text{ はヘッセ行列式}) \iff$$

$$p_0 - \lambda_0 = \mu(\widetilde{e_1 \pm e_2})(p_0), \quad \mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0) < 0, \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{-1}{\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0)}}$$

かつ平均曲率ベクトル $\mathfrak{h}(p_0)$ が光的となる。

この命題の主張 (1) は、口 - レンツ距離 2 乗関数の判別集合が

$$D_G = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{X}(p) + u(\widetilde{e_1 \pm e_2})(p), \quad p \in M, u \in \mathbb{R} \right\},$$

で与えられることを示しており、それは M に沿った光的超曲面 (の像) と一致する。主張 (2) は、その特異点が $\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0) < 0$, $u_0 = \pm \sqrt{-1/\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(p_0)}$ かつ平均曲率ベクトル $\mathfrak{h}(p_0)$ が光的であるような点 $\lambda_0 = \mathbf{X}(p_0) + u_0(\widetilde{e_1 \pm e_2})(p_0)$ に一致することを示している。

この事実をルジャンドル特異点論の立場から整理してみる。 $\pi : PT^*(\mathbb{R}_1^4) \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ を \mathbb{R}_1^4 上の射影的余接束とする。微分可能写像の特異点論概説でも解説した標準的接触構造を K とする。座標 (v_1, v_2, v_3, v_4) による自明性から $PT^*(\mathbb{R}_1^4) \cong \mathbb{R}_1^4 \times P(\mathbb{R}^3)^*$, であり、双対射影空間 $P(\mathbb{R}^3)^*$ の斉次座標 $[\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4]$ を用いて、この空間の座標を $((v_1, v_2, v_3, v_4), [\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4])$ と与える。今、口 - レンツ距離 2 乗関数に関して以下が成り立つ：

命題 4.3 G を M に沿った口 - レンツ距離 2 乗関数とするととき、任意の点 $((x, y), \boldsymbol{\lambda}) \in G^{-1}(0)$ に対して、 G が点 $((x, y), \boldsymbol{\lambda})$ において定める関数族 (芽) はモース超曲面族である。

従って、 G に対応するルジャンドル部分多様体が構成でき、光的超曲面は D_G の判別集合なので、そのルジャンドル部分多様体の波面となる。

次に、光的超曲面の特異点の幾何学的意味付けを行うために、Montaldi による接触の理論を摘要する。最初に以下の命題が成り立つことに注意する：

命題 4.4 点 $\lambda_0 \in \mathbb{R}_1^4$ が存在して $M \subset LC_{\lambda_0}$ となるための必要十分条件は λ_0 が光的超曲面 LH_M^\pm の孤立特異点でかつ $LH_M^\pm(U) \subset LC_{\lambda_0}$ となる事である。

この命題から、光的超曲面の特異点は M が光錐と局所的にどの程度近いかを表すという幾何学的意味をもつことが予想される。ここで、Montaldi の定理を引用する [21]。 X_i, Y_i ($i = 1, 2$) を \mathbb{R}^n の部分多様体で $\dim X_1 = \dim X_2$ かつ $\dim Y_1 = \dim Y_2$ なるものとする。 X_1 と Y_1 の y_1 における接触が X_2 と Y_2 の y_2 における接触と同じ型をもつとは微分同相芽 $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$ を満たすこととする。このとき $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$ と書く。

定理 4.5 X_i, Y_i ($i = 1, 2$) を \mathbb{R}^n の部分多様体で $\dim X_1 = \dim X_2$ かつ $\dim Y_1 = \dim Y_2$ なるものとする。 $g_i : (X_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$ をはめ込み芽、 $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ をしずめ込み芽で $(Y_i, y_i) = (f_i^{-1}(0), y_i)$ となるものとする。この時、 $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$ であるための必要十分条件は $f_1 \circ g_1$ と $f_2 \circ g_2$ が \mathcal{K} 同値であることである。

光的超曲面に話題をもどし、 $\mathcal{G}(x, \lambda) = \langle x - \lambda, x - \lambda \rangle$ で定義される関数 $\mathcal{G} : \mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。今、任意に与えられた $\lambda_0 \in \mathbb{R}_1^4$ に対して、 $g_{\lambda_0}(x) = \mathcal{G}(x, \lambda_0)$ と書くと $g_{\lambda_0}^{-1}(0) = LC_{\lambda_0}$ である。任意の $(x_0, y_0) \in U$ に対して $\lambda_0^\pm = \widetilde{X}(x_0, y_0) + u_0(e_1 \pm e_2)(x_0, y_0)$ を取ると

$$g_{\lambda_0^\pm} \circ \mathbf{X}(x_0, y_0) = \mathcal{G} \circ (\mathbf{X} \times id_{\mathbb{R}_1^4})((x_0, y_0), \lambda_0^\pm) = G(x_0, y_0, \lambda_0^\pm) = 0,$$

となる。ただし、 $u_0 = \pm \sqrt{-1/\mathcal{K}_l(1, \pm 1)(x_0, y_0)}$ である。さらに

$$\frac{\partial g_{\lambda_0^\pm} \circ \mathbf{X}}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(p_0, \lambda_0^\pm) = 0$$

と

$$\frac{\partial g_{\lambda_0^\pm} \circ \mathbf{X}}{\partial y}(p_0) = \frac{\partial G}{\partial y}(p_0, \lambda_0^\pm) = 0$$

が成り立つ。この事実は光錐 $g_{\lambda_0^\pm}^{-1}(0) = LC_{\lambda_0^\pm}$ は曲面 $M = \mathbf{X}(U)$ に点 $p_0 = \mathbf{X}(x_0, y_0)$ で接することを意味する。この時、 $LC_{\lambda_0^\pm}$ を $M = \mathbf{X}(U)$ の点 $p_0 = \mathbf{X}(x_0, y_0)$ における接光錐と呼ぶ。

ここで、空間的曲面と光錐との接触について考察する。 $LH_{M,i}^\sigma : (U, (x_i, y_i)) \rightarrow (LC_+^*, \mathbf{v}_i^\sigma)$ ($i = 1, 2$) $\sigma = \pm$ を 2 つの空間的曲面芽 $X_i : (U, (x_i, y_i)) \rightarrow (\mathbb{R}_1^4, p_i)$ の光的超曲面芽とする。 $LH_{M,1}^\sigma$ and $LH_{M,2}^\sigma$ が \mathcal{A} 同値とは微分同相芽 $\phi : (U, (x_1, y_1)) \rightarrow (U, (x_2, y_2))$ と $\Phi : (\mathbb{R}_1^4, \lambda_1^\sigma) \rightarrow (\mathbb{R}_1^4, \lambda_2^\sigma)$ が存在して $\Phi \circ LH_{M,1}^\sigma = LM_{M,2}^\sigma \circ \phi$ となることである。もし、両方の写像 $LM_{M,i}^\sigma$ の正則点の集合が $(U, (x_i, y_i))$ の中で稠密のとき、ルジャンドル部分多様体の一意性から $LH_{M,1}^\sigma$ と $LH_{M,2}^\sigma$ が \mathcal{A} 同値であるための必要十分条件は対応するルジャンドル部分多様体芽がルジャンドル同値であることである。さらにこの条件は対応する母関数族 G_1, G_2 が P - \mathcal{K} 同値であること同値である。ただし、 $G_i : (U \times \mathbb{R}_1^4, ((x_i, y_i), \lambda_i^\sigma)) \rightarrow \mathbb{R}$ は X_i の口 - レンツ距離 2 乗関数である。

一方、 $g_{i,\lambda_i^\sigma}(x, y) = G_i(x, y, \lambda_i^\sigma)$ と書くと $g_{i,\lambda_i^\pm}(x, y) = g_{\lambda_i^\pm} \circ \mathbf{x}_i(x, y)$ である。Montaldi の定理から $K(\mathbf{X}_1(U), LC_{\lambda_1^\sigma}, \lambda_1^\sigma) = K(\mathbf{x}_2(U), LC_{\lambda_2^\sigma}, \lambda_2^\sigma)$ である必要十分条件は \tilde{g}_{1,λ_1} and \tilde{g}_{2,λ_2} が \mathcal{K} 同値となることである。ルジャンドル特異点論の基本定理が摘要できる。ここで $Q^\sigma(\mathbf{X}, (x_0, y_0))$ を C^∞ 関数芽 $\tilde{g}_{\lambda_0^\sigma} : (U, (x_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ の局所環とする。ただし、 $\lambda_0^\sigma = LC_M^\sigma((x_0, y_0), u_0)$ で以下のように定義される：

$$Q^\pm(\mathbf{X}, (x_0, y_0)) = \frac{C_{(x_0, y_0)}^\infty(U)}{\langle \langle \mathbf{X}(x, y), e_1 \pm e_2(x_0, y_0) \rangle - 1 \rangle_{C_{(x_0, y_0)}^\infty(U)}}$$

ただし、 $C_{(x_0, y_0)}^\infty(U)$ は (x_0, y_0) における C^∞ 関数芽全体の作る局所環を表す。

定理 4.6 $X_i : (U, (x_i, y_i)) \longrightarrow (\mathbb{R}_1^4, \mathbf{X}_i((x_i, y_i)))$ ($i = 1, 2$) を空間的曲面芽で対応する光的超曲面のルジャンドル部分多様体芽はルジャンドル安定であると仮定する。 $\sigma = +$ or $-$ とするとき、以下の条件は同値である：

- (1) 光的超曲面芽 $LH_{M_1}^\sigma$ と $LH_{M_2}^\sigma$ は \mathcal{A} 同値。
- (2) G_1 と G_2 は P - \mathcal{K} 同値。
- (3) g_{1,λ_1} と g_{2,λ_2} は \mathcal{K} 同値。
- (4) $K(\mathbf{X}_1(U), LC_{\lambda_1^\sigma}, \lambda_1^\sigma) = K(\mathbf{X}_2(U), LC_{\lambda_2^\sigma}, \lambda_2^\sigma)$
- (5) $Q^\sigma(\mathbf{X}_1, (x_1, y_1))$ と $Q^\sigma(\mathbf{X}_2, (x_2, y_2))$ は \mathbb{R} 多元環として同型。

空間的曲面芽 $\mathbf{X} : (U, (x_0, y_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}_1^4, \mathbf{X}(x_0, y_0))$ に対して、集合芽

$$(\mathbf{X}^{-1}(LC_{\lambda^\pm}), (x_0, y_0))$$

を \mathbf{X} の (x_0, y_0) における接光錐標型と呼ぶ。ただし、 $\lambda^\pm = \mathbf{X}(x_0, y_0) + u_0(\widetilde{e_1 \pm e_2})(x_0, y_0)$ かつ $u_0 = \pm\sqrt{-1/\mathcal{K}_l(x_0, y_0)}$ とする。上記の定理の系として以下がなりたつ：

系 4.7 定理と同じ仮定の下で、光的超曲面芽 $LH_{M_1}^\sigma$ と $LH_{M_2}^\sigma$ が \mathcal{A} 同値のとき、接光錐標型

$$(\mathbf{X}_1^{-1}(LC_{\lambda_1^\pm}), (x_1, y_1)) \quad \text{and} \quad (\mathbf{X}_2^{-1}(LC_{\lambda_2^\pm}), (x_2, y_2))$$

は集合芽として微分同相である。

次の定理は上記のような空間的曲面は生成的であることを示している：

定理 4.8 開で稠密な部分集合 $\mathcal{O} \subset \text{Emb}^s(U, \mathbb{R}_1^4)$ が存在して、任意の $\mathbf{X} \in \mathcal{O}$ にたいして、対応する光的超曲面 LH_M^\pm の任意の点におけるルジャンドル部分多様体芽はルジャンドル安定である。

ルジャンドル安定写像芽の分類結果より、以下の系が成り立つ：

系 4.9 開で稠密な部分集合 $\mathcal{O} \subset \text{Emb}^s(U, \mathbb{R}_1^4)$ が存在して、任意の $\mathbf{X} \in \mathcal{O}$ にたいして、対応する光的超曲面 LH_M^\pm の任意の点 $(x, y, u) \in U \times \mathbb{R}$ における芽は以下の写像芽のどれかに \mathcal{A} 同値である：

- (A₁) $f(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3, 0)$,
- (A₂) $f(u_1, u_2, u_3) = (3u_1^2, 2u_1^3, u_2, u_3)$,
- (A₃) $f(u_1, u_2, u_3) = (4u_1^3 + 2u_1u_2, 3u_1^4 + u_2u_1^2, u_2, u_3)$,
- (A₄) $f(u_1, u_2, u_3) = (5u_1^4 + 3u_2u_1^2 + 2u_1u_3, 4u_1^5 + 2u_2u_1^3 + u_3u_1^2, u_1, u_2)$,
- (D₄⁺) $f(u_1, u_2, u_3) = (2(u_1^2 + u_2^2) + u_1u_2u_3, 3u_1^2 + u_2u_3, 3u_2^2 + u_1u_3, u_3)$,
- (D₄⁻) $f(u_1, u_2, u_3) = (2(u_1^3 - u_1u_2^2) + (u_1^2 + u_2^2)u_3, u_2^2 - 3u_1^2 - 2u_1u_3, u_1u_2 - u_2u_3, u_3)$.

さらに、この標準形から以下が成り立つ：

系 4.10 T 開で稠密な部分集合 $\mathcal{O} \subset \text{Emb}^s(U, \mathbb{R}_1^4)$ が存在して、任意の $\mathbf{X} \in \mathcal{O}$ にたいして、任意の点 $(x_0, y_0, \lambda_0) \in U \times \mathbb{R}$ における対応する接光錐的標型は以下の集合芽に微分同相である：

- (1) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0) \mid x^3 + y^2 = 0\}$ (通常カスプ)

- (2) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0) \mid x^4 \pm y^2 = 0\}$ (接節点か孤立点)
- (3) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0) \mid x^5 + y^2 = 0\}$ (くちばしカスプ)
- (4) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0) \mid x^3 - xy^2 = 0\}$ (3直線)
- (5) $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0) \mid x^3 + y^3 = 0\}$ (1直線)

5 重力場レンズ

単レンズの場合

典型的な一個の重力場レンズのモデルは以下のようにして与えられる：ここで、レンズは非常に薄くて屈折率は十分小さいと仮定する (cf., [23])。光が直進する場合とレンズを通る場合にかかる時間の遅れは Time-delay map によって表される； $T_S : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$T_S(\mathbf{r}) = (1 + z_L) \left[\frac{d_{OL}d_{OS}}{2d_{LS}} \left\| \frac{\mathbf{s}}{d_{OS}} - \frac{\mathbf{r}}{d_{OL}} \right\|^2 - \Psi(\mathbf{r}) \right].$$

ここで、 z_L はレンズ平面の赤方変異をあらわし、 d_{OL}, d_{OS}, d_{LS} angular diameter distances, \mathbf{r} はレンズ平面上で光りが当たる位置 \mathbf{s} は光源の位置 $\Psi(\mathbf{r})$ はレンズ平面の deflector potential をあらわし、

$$\Psi(\mathbf{r}) = 4 \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\mathbf{r}') \ln \left\| \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{d_{OL}} \right\|.$$

与えられるが、これは2次元のポアソン方程式 $\Delta \Psi(\mathbf{r}) = 8\pi \sigma(\mathbf{r})$ の解である。ただし、 $\sigma(\mathbf{r})$ は surface mass density である。適当な座標変換で、time-delay map は扱いやすい形

$$T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \Theta_L \left[\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{2} - \psi(\mathbf{x}) \right] \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2).$$

に変換できる。ここで \mathbf{y} は光源 \mathbf{s} に \mathbf{x} はレンズ平面上の点 \mathbf{r} に対応している。

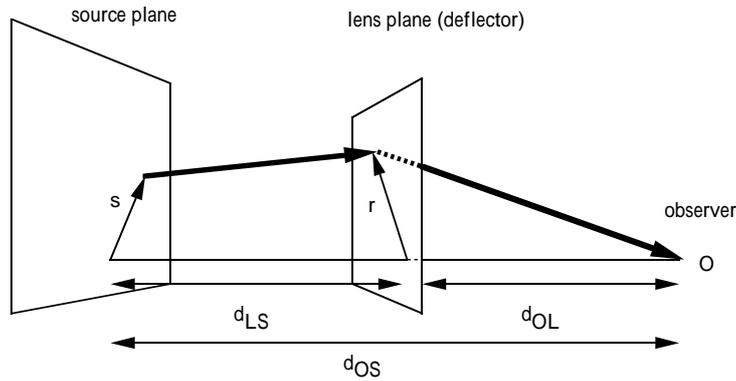


図 18

フェルマーの原理から time delay map $T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ の変数 \mathbf{x} に関する臨界点が輝く光線を定める (cf., [23])。この理由から、 $T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ の変数 \mathbf{x} に関する臨界点を点光源 \mathbf{y} に対応する像と呼ぶ。点光源 \mathbf{y} に対応する像 \mathbf{x} の倍率は

$$A_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\det T_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\|},$$

で定められる。ただし、 $T(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ であり、 $T_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ は \mathbf{x} 変数に関するヘッセ行列である。重力場レンズにおける、コースティック点とは点光源 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ で少なくとも一つ無限大の倍率を持つ像が存在するときにその点光源 \mathbf{y} のことである。言い換えると、それは time-delay map $T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ が少なくとも一つ退化した臨界点 (i.e., $\det T_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 0$) をもつような点光源 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ の事である。従って、我々は time-delay map を $T^*\mathbb{R}^2$ 内のあるラグランジュ部分多様体の母関数族とみなす事ができそうである。[23] で Petters は実際にそうなる事を指摘している。実際、time-delay map $T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ に対して、関数族 $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2) = \Theta \left[\frac{\|(q_1, q_2) - (\lambda_1, \lambda_2)\|^2}{2} - \psi(q_1, q_2) \right] = T_q(\lambda)$$

と定義する。このとき、我々は簡単に F がモース族であることを示すことができ、

$$\Phi_{\mathcal{H}}(\Sigma(F)) = \left\{ \left(\lambda_1, \lambda_2, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \right) \mid \frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0 \right\}$$

がラグランジュ部分多様体となる。ここで、条件

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0$$

は条件 $\text{grad}_{\mathbf{x}} T = 0$ に対応しているので、このラグランジュ部分多様体は輝く光線に対応していることが解る。そして、この場合のラグランジュ写像のコースティックスが重力場レンズとしてのコースティックスとなっている。

一方、ここでは別のシンプレクティック幾何学的枠組みを構成してみる。ここでは、積シンプレクティック多様体

$$\mathcal{M}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = (T^*M_x \times T^*M_y, \omega_{M_y} \ominus \omega_{M_x})$$

を考える。ただし、 ω_{M_y} と ω_{M_x} は標準的シンプレクティック構造として、 $T^*M_x \times T^*M_y$ 上の標準射影 π_i によってシンプレクティック構造を $\Omega_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \omega_{M_y} \ominus \omega_{M_x} = \pi_2^* \omega_{M_y} - \pi_1^* \omega_{M_x}$ と定める。対応する相空間 (T^*M_x, ω_{M_x}) と (T^*M_y, ω_{M_y}) をそれぞれ、観測空間と光源空間と呼ぶ。重力場レンズの場合は $M_x = \mathbb{R}^2$ と $M_y = \mathbb{R}^2$ である。そこで、我々の立場で重力場レンズを解釈するとそれは、ラグランジュ部分多様体

$$L_\psi = \left\{ \left((\mathbf{x}, \text{grad}_{\mathbf{x}} T), (\mathbf{y}, \text{grad}_{\mathbf{y}} T) \right) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_x \times M_y \right\}$$

の事であり、その母関数 (母関数族ではない) が time-delay map

$$T(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \Theta_L \left[\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{2} - \psi(\mathbf{x}) \right] \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2).$$

である。前記の議論から輝く光線は $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \text{grad}_{\mathbf{x}} T = 0\}$ で与えられ、対応する点光源の集まりは T^*M_y のラグランジュ部分多様体

$$L_S = \{(\mathbf{y}, \text{grad}_{\mathbf{y}} T) \in T^*M_y \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_x \times M_y, \text{grad}_{\mathbf{x}} T = 0\}$$

である。この時、

$$\pi_2(L_\psi \cap ((M_x \times \{\mathbf{0}\}) \times T^*M_y)) = L_S$$

が成り立つ。

さらに、より一般に ([14]) で与えられたシンプレクティック対応の理論を摘要する。 X_1, X_2 を同じ次元をもつ多様体とする。ここで、積シンプレクティック多様体

$$(T^*X_1 \times T^*X_2, \omega_{X_2} \ominus \omega_{X_1}).$$

を考える。 T^*X_1 から T^*X_2 へのシンプレクティック対応とは

$$(T^*X_1 \times T^*X_2, \omega_{X_2} \ominus \omega_{X_1}).$$

のラグランジュ部分多様体 R の事である。標準射影

$$\pi_1 \times \pi_2 : T^*X_1 \times T^*X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$$

の R への制限が特異点を持たないとき R は (少なくとも局所的には) シンプレクティック写像のグラフである。

R を $(T^*X_1 \times T^*X_2, \omega_{X_2} \ominus \omega_{X_1})$ の中をシンプレクティック対応として、 S を T^*X の部分集合とする。この時、 S の R によるシンプレクティック像とは

$$R(S) = \{p_2 \in T^*X : \exists_{p_1 \in S} (p_1, p_2) \in R\}$$

の事とする。もし S が (T^*X_1, ω_{X_1}) のイソトロピック (特に、ラグランジュ) 部分多様体とすると、 $R(S)$ もまた (T^*X_2, ω_{X_2}) のイソトロピック (ラグランジュ) 部分多様体となる。

重力場レンズの場合、 S_0 が観測者ラグランジュ部分多様体を表すとき、光源ラグランジュ部分多様体は、そのシンプレクティック像

$$L_\psi(S_0) \subset T^*M_y$$

である。

[23] や前記の議論等による標準的枠組みでは、 S_0 は余接束 T^*M_x の零切断である。従って、この場合、光源ラグランジュ部分多様体は

$$L_\psi(S_0) = \{(\mathbf{y}, \text{grad}_{\mathbf{y}}T) \mid \text{grad}_{\mathbf{x}}T = \mathbf{0}\}$$

であり、 $L_\psi(S_0)$ の母関数族は

$$F(q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2) = \Theta \left[\frac{\|(q_1, q_2) - (\lambda_1, \lambda_2)\|^2}{2} - \psi(q_1, q_2) \right]$$

で与えられることがわかる。この母関数族は前記の [23] による枠組みで与えられたものと一致する。我々は、 S が T^*X_1 のラグランジュ部分多様体であり、 R が T^*X_1 から T^*X_2 へのシンプレクティック対応である時、対 (S, R) を一般レンズ系と呼ぶ。標準射影 $\pi_1 \times \pi_2|_R : R \longrightarrow X_1 \times X_2$ の R への制限が非特異であるとき (この場合は、 R は局所的にはあるシンプレクティック写像 $H : T^*M_x \longrightarrow T^*M_y$ のグラフとなっていると考えられるが) (S, R) は正則な一般レンズ系と呼ばれる。さらに、 (S, R) が正則で S が余接束 T^*X_1 のゼロ切断である場合、 (S, R) は特殊レンズ系と呼ばれる。前記の議論から、重力場レンズは特殊レンズ系であると解釈することがで

きる。この枠組みは、Petters による枠組みより、自然な枠組みであると思われ、実際多重重力場レンズの場合はこの枠組みが本質的な役割を担う [13, 24]。

多重レンズの場合

2重レンズの場合のモデルは以下の用にしてあたえられる：2つのレンズは非常に薄くて屈折率は十分小さくかつ2つのレンズは十分離れているのでお互いには何も影響しあわないと仮定する。光源の位置 s と2つのレンズ平面からなる4次元の空間 $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ を考える。ここでも時間の遅れをはかる Time-delay map を考えるがそれは以下の用に与えられる： $T_S : U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$T_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i=1}^2 (1 + z_i) \left[\frac{d_i d_{i+1}}{2d_{i,i+1}} \left\| \frac{\mathbf{r}_{i+1}}{d_{i+1}} - \frac{\mathbf{r}_i}{d_i} \right\|^2 - \Psi_i(\mathbf{r}_i) \right].$$

ここで、 z_i はそれぞれのレンズ面の赤方変異をあらわし、 d_{ij} は i 番目のレンズと j 番目のレンズの間の angular diameter distance を表す。また d_i は i 番目のレンズから観測者までの angular diameter distance を表し $d_{k+1} \equiv d_S$ である。 \mathbf{r}_i は i 番目のレンズ上に光りが当たる位置を表し $\mathbf{r}_{k+1} \equiv s$ である。さらに $\Psi_i(\mathbf{r}_i)$ は i 番目のレンズの deflector potential を表す。

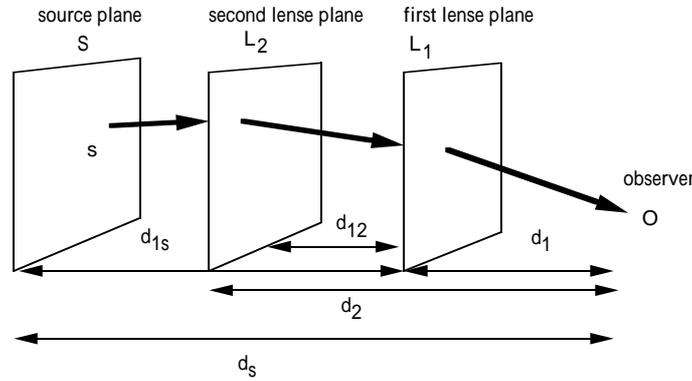


図 19

ここでも、適当な座標変換で double plane time-delay map は扱いやすい形：

$$T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Theta_1 \left[\frac{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2}{2} - \beta_{1,2}\psi_1(\mathbf{x}_1) \right] + \Theta_2 \left[\frac{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}\|^2}{2} - \beta_{2,3}\psi_2(\mathbf{x}_2) \right],$$

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2)$. に変換される。

ここで、フェルマ - の原理を考えるが、それは単レンズの場合と同じ形で与えられる：光源 \mathbf{y} に対応する輝く光線は $T_{\mathbf{y}}$ の臨界点に対応する。言い換えると輝く光線の像は

$$\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) | \text{grad}_{\mathbf{x}_i} T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}, i = 1, 2\}.$$

で与えられる。

注意もしこの原理を単純に採用すると、2つの独立したレンズの影響を区別することが出来ない。実際、Petters と Levine[24] は2つのレンズをあたかもひとまとまりのレンズのようにあつ

かっている。このように扱おうと標準的なコースティック（折り目とカスプ）しか理論的にはあらわれない。しかし、他の論文 [17] において、折り目やカスプ以外のコースティックが生成的に現れるであろうと指摘している。従って、我々の見解はフェルマ - の原理の新たな解釈が必要であろうということとなる。

我々は以下の問題を考える：

問題 2 重重力場レンズ現象を記述する枠組みを構成せよ

ここで、フェルマ - の原理の新たな解釈を与えるため、以下のように time-delay map を分解する：

$$\begin{aligned} T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_2; \mathbf{y}) &= \Theta_2 \left[\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2}{2} - \beta_{23}(\mathbf{x}_2) \right] \\ T_{\beta_{12}}(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) &= \Theta_1 \left[\frac{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2}{2} - \beta_{12}(\mathbf{x}_1) \right]. \end{aligned}$$

Then

$$T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = T_{\beta_{12}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

ここで、 $T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ と $T_{\beta_{12}}(\mathbf{x}_1; \mathbf{y})$ をそれぞれ単レンズの time-delay map と理解する。このとき、

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{x}_1} T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= \text{grad}_{\mathbf{x}_1} T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \\ \text{grad}_{\mathbf{x}_2} T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= \text{grad}_{\mathbf{x}_2} T_{\beta_{12}}(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \\ &\quad + \text{grad}_{\mathbf{x}_2} T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_2; \mathbf{y}). \end{aligned}$$

なので、フェルマ - の原理はこの 2 つの関数で書き表わすと、

$$\begin{cases} \text{grad}_{\mathbf{x}_1} T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \\ \text{grad}_{\mathbf{x}_2} T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

となる。

いま、2 つの関数族を

$$F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$F_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = T_{\beta_{12}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

とおき

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + F_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

とする。

フェルマ - の原理から 2 つの 2 次元多様体

$$\begin{aligned} \Sigma(F_1) &= \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^4 \mid \text{grad}_{\mathbf{x}_1} F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}\} \\ \Sigma(F) &= \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^6 \mid \text{grad}_{\mathbf{x}_1} F(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \\ &= \text{grad}_{\mathbf{x}_2} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

が得られる。さらに2つの写像を

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \Phi_{F_1} : \Sigma(F_1) \longrightarrow T^*\mathbb{R}^2 ; \\ & \Phi_{F_1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_2, \text{grad}_{\mathbf{x}_2} F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \\ \text{(B)} \quad & \Phi_F : \Sigma(F) \longrightarrow T^*\mathbb{R}^2 ; \\ & \Phi_F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \text{grad}_{\mathbf{y}} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

と定める。この時、両方の写像の像はラグランジュ部分多様体であり、(A)は2番目のレンズ上の光りに(B)は光源に対応している。

注意 (a) 2つのレンズ間の距離は非常に大きいので、レンズどうしは互いに影響しない。従って、この場合、輝く光の安定性を考えるとき、2つのレンズをお互いに独立に摂動場合の安定性を考える必要がある。

(b) $F_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ はある正準変換 $H : T^*\mathbb{R}^2 \longrightarrow T^*\mathbb{R}^2$ のグラフの母関数と考える事ができる。言い換えると、ラグランジュ部分多様体 $\Phi_F(\Sigma(F))$ は $H(\Phi_{F_1}(\Sigma(F_1)))$ と一致する。

ここで、2重レンズを記述するためのシンプレクティック幾何学的枠組みとしてシンプレクティック対応の合成の理論を摘要する。2つのシンプレクティック対応

$$\begin{aligned} R_1 & \subset (T^*X_1 \times T^*X_2, \omega_{X_2} \ominus \omega_{X_1}), \\ R_2 & \subset (T^*X_2 \times T^*X_3, \omega_{X_3} \ominus \omega_{X_2}) \end{aligned}$$

とは

$$\begin{aligned} R_2 \circ R_1 & = \{(p_1, p_3) \in T^*X_1 \times T^*X_3 \mid \exists p_2 \in T^*X_2 (p_1, p_2) \in R_1 \\ & \text{and } (p_2, p_3) \in R_2\}. \end{aligned}$$

の事である。

今 S が T^*X_1 のラグランジュ部分多様体であるとき、2つのシンプレクティック像 $R_1(S)$ と $R_2 \circ R_1(S)$ を持つ。

2重重力場レンズはシンプレクティック対応の対 $(L_{\beta_{12}}, L_{\beta_{23}})$,

$$\begin{aligned} L_{\beta_{12}} & \subset (T^*M_{x_1} \times T^*M_{x_2}, \omega_{M_{x_2}} \ominus \omega_{M_{x_1}}), \\ L_{\beta_{23}} & \subset (T^*M_{x_2} \times T^*M_y, \omega_{M_y} \ominus \omega_{M_{x_2}}). \end{aligned}$$

と理解される。ただし、光源ラグランジュ部分多様体は零切断 $S_0 \subset T^*M_{x_1}$ の合成による像 $L_{\beta_{23}} \circ L_{\beta_{12}}(S_0)$ で与えられる。また、 $T_{\beta_{12}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は $L_{\beta_{12}}$ の母関数であり $T_{\beta_{23}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ は $L_{\beta_{23}}$ の母関数である。従って、光源 \mathbf{y} から出る光の位置は方程式系

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{x}_1} T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) & = \mathbf{0} \\ \text{grad}_{\mathbf{x}_2} T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) & = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

の解 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ によって与えられる点

$$((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})) \in L_{\beta_{12}} \times L_{\beta_{23}}$$

である。

関数族 $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times M_y \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(q, \lambda, \mu) = T_2(q, \lambda, \mu) = T_{\beta_{12}}(q, \lambda) + T_{\beta_{23}}(\lambda, \mu)$$

と定義すると、これはラグランジュ部分多様体の像

$$L_{\beta_{23}} \circ L_{\beta_{12}}(S_0) \subset T^*M_y.$$

の母関数族である。

(S, R_1, R_2) が 2 重レンズ系であるとは以下の条件をみたすときにいう：

(a) $S \subset T^*X_1$ はラグランジュ部分多様体である。

(b) R_i は T^*X_i から T^*X_{i+1} , ($i = 1, 2$). へのシンプレクティック対応である。

さらに 2 重レンズ系 (S, R_1, R_2) が正則であるとは両方の R_i ($i = 1, 2$) がシンプレクティック対応のグラフとなっていることとする。また、2 重レンズ系 (S, R_1, R_2) が特殊であるとは S が T^*X_1 の零切断であることとする。

命題 5.1 2 重重力場レンズは特殊正則 2 重レンズ系である。

2 重レンズ系間の自然な同値関係として以下のものが考えられる：2 つの 2 重レンズ系 $(S, R_1, R_2), (S, R'_1, R'_2)$ がラグランジュ同値とは 2 つのラグランジュ同値芽

$$\Phi_2 : (T^*X_2, z_2) \longrightarrow (T^*X_2, z'_2),$$

$$\Phi_3 : (T^*X_3, z_3) \longrightarrow (T^*X_3, z'_3)$$

が存在して

$$(id_{T^*X_1} \times \Phi_2)(R_1) = R'_1 \text{ and } (\Phi_2 \times \Phi_3)(R_2) = R'_2.$$

をみたすこととする。この同値関係は最も自然な同値関係であるが、分類は非常に困難である。そこで、より弱くてしかも十分な情報を保存する同値関係を考える必要がある。2 重レンズ系 $(S, R_1, R_2), (S, R'_1, R'_2)$ が弱ラグランジュ同値とはラグランジュ同値芽 $\tilde{\Phi}_3 : (T^*X_3, z_3) \longrightarrow (T^*X_3, z'_3)$ と $\tilde{\Phi} : ((T^*X_2 \times T^*X_3, (z_2, z_3)) \longrightarrow (T^*X_2 \times T^*X_3, (z'_2, z'_3)))$ が存在して

$$\pi_{X_3} \circ \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_3 \circ \pi_{X_3}$$

$$\tilde{\Phi}(R_1(S) \times R_2 \circ R_1(S)) = R'_1(S) \times R'_2 \circ R'_1(S).$$

をみたすこととする。

命題 5.2 2 重レンズ系 $(S, R_1, R_2), (S, R'_1, R'_2)$ が弱ラグランジュ同値ならば 2 組のラグランジュ部分多様体 $R_1(S), R'_1(S)$ と $R_2 \circ R_1(S), R'_2 \circ R'_1(S)$ はラグランジュ同値である。

注意弱ラグランジュ同値は最初のレンズによるコースティックと 2 つ目のレンズとの合成によるコースティック両方の微分同相型を保存する

ラグランジュ部分多様体芽は、常に母関数族を持っているが、特殊正則 2 重レンズ系に対しても同様の主張がなりたつ。 (F_1, F_2) が特殊正則 2 重レンズ系 (芽) (S, R_1, R_2) の母関数対であ

るとは $F_1 : (X_1 \times X_2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ が R_1 の母関数であり $F_2 : (X_2 \times X_3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ が R_2 の母関数であることとする。このとき、 F_1 はラグランジュ部分多様体芽 $R_1(S) \subset T^*X_2$ の母関数族となり

$$F((x_1, x_2), x_3) = F_1(x_1, x_2) + F_2(x_2, x_3)$$

で与えられる関数族 $F : (X_1 \times X_2) \times X_3, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ はラグランジュ部分多様体芽 $R_2 \circ R_1(S) \subset T^*X_3$ の母関数族である。

命題 5.3 任意の特殊正則 2 重レンズ系 (芽) は上記の方法で構成できる。

命題 5.4 (F_1, F_2) と (G_1, G_2) を共通の特殊 2 重レンズ系 (芽) の母関数対とするととき、 $F_1 = G_1 + \text{constant}$ と $F_2 = G_2 + \text{constant}$ がなりたつ。

さらに、弱ラグランジュ同値にかんしては以下の同値関係が対応する：関数芽 $F_1, G_1 : (X_1 \times X_2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ と $F_2, G_2 : (X_2 \times X_3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, に対して、対 (F_1, F_2) 、 (G_1, G_2) が $R \times L^+$ 同値とは微分同相芽

$$\Phi : (X_1 \times X_2 \times X_3, 0) \rightarrow (X_1 \times X_2 \times X_3, 0)$$

で $\Phi(x_1, x_2, x_3) = (\phi_1(x_1, x_2, x_3), \phi_2(x_2, x_3), \phi(x_3))$ の形のものと同関数芽 $\alpha : (X_3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) + F_2(x_2, x_3) &= G_1(\phi_1(x_1, x_2, x_3), \phi_2(x_2, x_3)) \\ &\quad + G_2(\phi_2(x_2, x_3), \phi(x_3)) + \alpha(x_3). \end{aligned}$$

を満たすこととする。

命題 5.5 (F_1, F_2) と (G_1, G_2) をそれぞれ特殊正則 2 重レンズ系 (芽) (S_0, R_1, R_2) 、 (S_0, R'_1, R'_2) の母関数対とする。このとき、 (S_0, R_1, R_2) と (S_0, R'_1, R'_2) が弱ラグランジュ同値であるための必要十分条件は (F_1, F_2) と (G_1, G_2) が $R \times L^+$ 同値であることである。

さらに、 (F_1, F_2) が無限小 $R \times L^+$ 安定であるとは

$$\mathcal{E}_{(x_1, x_2)} + \mathcal{E}_{(x_2, x_3)} \subset \left\langle \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathcal{E}_{(x_1, x_2, x_3)}} + \left\langle \frac{\partial(F_1 + F_2)}{\partial x_2} \right\rangle_{\mathcal{E}_{(x_2, x_3)}} + \left\langle \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, 1 \right\rangle_{\mathcal{E}_{x_3}}.$$

が成り立つこととする。このとき、以下がなりたつ：

命題 5.6 任意の無限小 $R \times L^+$ 安定な対は以下のような対 (F_1, F_2) に $R \times L^+$ 同値である： F_1 は $F_1(x_1, 0)$ の R^+ 普遍開折で F_2 は $(R \times L^+)_{F_1}$ 作用の開軌道に属する。

特に $n = 2$ の場合は $F(x, u, v) = F_1(x, u) + F_2(u, v)$ 、 $x, u, v \in \mathbb{R}^2$ と書き。以下の分類結果が得られる：

命題 5.7 F_1 を無限小 R^+ 普遍的なモース関数族とする。このとき、生成的な母関数対(芽) (F_1, F_2) は以下の標準形のどれかに $R \times L^+$ 同値となる：

$$\begin{aligned}
 (A_1A_1) &: (\pm x_1^2 \pm x_2^2, \pm u_1^2 \pm u_2^2) \\
 (A_1A_2) &: (\pm x_1^2 \pm x_2^2, u_1^3 \pm u_2^2 + v_1u_1) \\
 (A_1A_3) &: (\pm x_1^2 \pm x_2^2, \pm u_1^4 \pm u_2^2 + v_1u_1^2 + v_2u_1) \\
 (A_2B_2) &: (x_1^3 \pm x_2^2 + x_1u_1, \pm u_1^2 \pm u_2^2 + v_1u_1) \\
 (A_2B_3) &: (x_1^3 \pm x_2^2 + x_1u_1, u_1^3 \pm u_2^2 + v_1u_1 + v_2u_1^2) \\
 (A_2C_2) &: (x_1^3 \pm x_2^2 + x_1u_1, u_1u_2 \pm u_2^2 + v_1u_2) \\
 (A_2C_3) &: (x_1^3 \pm x_2^2 + x_1u_1, u_1u_2 + u_2^3 + v_1u_2 + v_2u_2^2) \\
 (A_3X) &: (\pm x_1^4 \pm x_2^2 + x_1^2u_1 + x_1u_2, \xi(u, v)),
 \end{aligned}$$

ただし、 ξ は C^∞ 関数芽である。

注意最初の 3 つの (AA) は標準的な平面コースティックを与える (i.e., 空集合か折り目かカスプ). $(AB), (AC)$ という 4 つの場合は A , と B または C の合成をあらわすが、しかし、 (A_2C_3) の場合のみが原点が合成でコースティックをもつ。この場合は、計算すると

$$R_2 \circ R_1(s) = \{(-2xy, y, x, x^2) \mid (x, y) \in (\mathbb{R}^2, 0)\} \subset T^*X_3.$$

となり、 X_3 への射影は局所的に $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0); f(x, y) = (-2xy, y)$ と表される。この写像芽はピンチ写像 (cf., 図 20) と呼ばれるもので、決して Thom 写像となり得ない有名な例である。

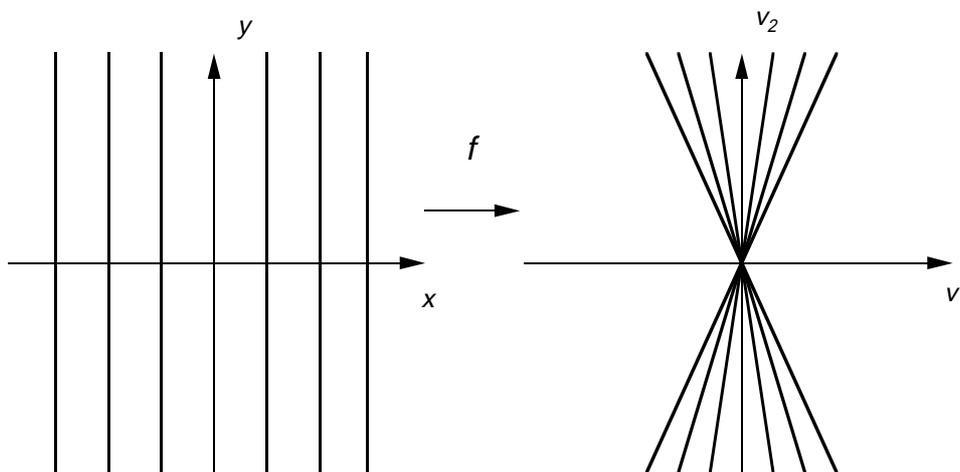


図 20

最後の場合は、 C^∞ 関数芽 ξ の取り方に制限がないので、 A_3 型コースティックとのあらゆる複雑な合成がありうることを示唆している。

6 その他の話題

海洋音響学への応用

水中においては電磁波は非常に短い時間内に減衰してしまうので、海洋内ではレーダーは無力である。したがって良く知られている様に、音波探知機が代わりに使用される。この場合、単純なモデルとして屈折係数 $\eta(z)$ を持つ 2 次元 (x, z) 空間の時間調和的音波の伝播を記述するヘルムホルツ方程式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (x, z) + k^2 \eta^2(z) u(x, z) = f(x, z)$$

が知られている。一般には、考える領域は境界（海面）を持ちしかも、 $\eta(z)$ は区分的に滑らかな連続関数として与えられる。この場合、対応する音波の軌道はアイコナル方程式

$$(E) \quad H(x, z, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - \eta^2(z)) = 0$$

のハミルトン流の (x, z) 平面への射影であることが知られている。従来、この音波の軌跡を光線と見なすことにより幾何光学の類似として、レイトレーシング法と呼ばれる方法で観測地点から逆に音源を求めることが基本的な方法としてあった。大洋における低周波音波探知機はこの方法を用いることによっても十分実用的であるが、より複雑な海外線を持つ（エーゲ海や日本海などのような）状況においては、高周波音波探知機が必要となる。この場合、音が集中する曲面（コースティック、焦線）の存在を無視できなくなり、より正確な数学的理論が必要となる。近年、地震波の到達時間を計算することの必要性とも関係して、この高周波レイトレーシング法とも呼ぶ方法を如何に開発するかがヨーロッパを中心にさかんである。この場合には、 $\eta(z)$ が滑らかでないことに起因して、通常 of 安定なコースティック（フォールド、カस्प）の他に境界コースティック等がジェネリックにあらわれることがわかる [8]。

1 階非線形偏微分方程式の弱解の特異性の研究への応用

1 階非線形偏微分方程式として、（解析学的に）良く研究されているものとして保存則の方程式とハミルトン・ヤコビ方程式がある。これらの方程式の弱解として、エントロピー解と粘性解が知られている。しかし、これらの解は、一般的に滑らかではなく「特異性」があらわれる。この特異性がどのように現れ、どのように分岐していくかを研究することは解の性質を知る上でさらに具体的な現象に応用するに際して、非常に重要である。

一方、1 階の偏微分方程式については、特性曲線の方法が古くから良く知られている。この、特性曲線の方法で方程式を解くと、§ 4 でも見たように、一般に多価解となる。この多価性が出現する状況がルジャンドル特異点やラグランジュ特異点として認識される。上記の弱解は、解の一意性や安定性という非常に良い性質を持っているので、この特性曲線の方法で構成された多価解と弱解の関係を研究することが弱解の特異性を研究する鍵となる。実際、ハミルトン・ヤコビ方程式の場合はハミルトン関数が凸という条件のもとでは、多価解の分枝のなかで細小の枝を選ぶ事により、粘性解が得られることが解り、その特異性のジェネリックな分岐も分類されている [2]。しかし、ハミルトン関数が凸とは限らない場合には空間次元が 1 次元の場合にしか満足な研究成果はない [4, 7]。

また保存則の方程式については、ハミルトン・ヤコビ方程式より、ずっと歴史が古いにも関わらず特異性の分岐についてはあまり多くの研究がないのが現状である。この場合も、多価解の分岐については、筆者等の研究がほとんど唯一である [6]。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*, Birkhäuser (1986)
- [2] I. A. Bogaevski, *Perestroikas of fronts in evolutionary families*, Proc. of the Steklov Inst. of Math. **209** (1995) 57–72
- [3] J. Ehlers and E. T. Newman, *The theory of caustics and wave front singularities with physical applications*, Journal of Mathematical Physics, **41** (2000) 3344–3378
- [4] 泉屋 周一、「1階偏微分方程式の解の特異性」数学論説、52巻1号、16–30
- [5] 泉屋 周一、石川 剛郎、「応用特異点論」共立出版 (1998)
- [6] S. Izumiya and G. T. Kossioris, *Geometric singularities for solutions of single conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal., **139** (1997),255–290
- [7] S. Izumiya and G. T. Kossioris, *Bifurcations of shock waves for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations of one space variables*, Bull. Sci. Math., **121** (1997),619–667
- [8] S. Izumiya, G. T. Kossioris and G. N. Makrakis, *Multivalued solutions to the eikonal equation in stratified media*, Quarterly of Applied Math., **LIX** (2001) 365–390
- [9] S. Izumiya, D-H. Pei and T. Sano, *The lightcone Gauss map and the lightcone developable of a spacelike curve in Minkowski 3-space*, Glasgow Math. J., **42** (2000), 75–89
- [10] S. Izumiya, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *The lightcone Gauss map of a spacelike surface in Minkowski 4-space*, preprint (2001)
- [11] S. Izumiya, M. Kossowski, D. Pei and M. C. Romero Fuster, *Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski 4-space*, in preparation
- [12] 泉屋周一、佐野貴志、「微分幾何学と特異点」特異点の数理論第1巻、共立出版 (2001)
- [13] S. Izumiya and S. Janeczko, *A symplectic framework for multiplane gravitational lensing*, in preparation
- [14] S. Janeczko, *Generating families for images of Lagrangian submanifolds and open swallow-tails*, Mathematical Proceedings of Cambridge Phil. Soc. vol. 100 (1986),91–107
- [15] M. Kossowski, *The S^2 -valued Gauss maps and split total curvature of space-like codimension-2 surface in Minkowski space*, J. London Math. Soc.(2) **40** (1989), 179–192
- [16] M. Kossowski, *The intrinsic conformal structure and Gauss map of a light-like hypersurface in Minkowski space*, Transactions of the American mathematical society **316** Number 1, (1989), 369–383
- [17] H. I. Levine and A. O. Petters, *New caustics singularities in multiple lens plane gravitational lensing*, Astron. Astrophys. vol. 272 (1993),L17–L19
- [18] H. I. Levine, A.O. Petters, J. Wambsganss, *Applications of singularity theory to gravitational lensing I*, J. Math. Phys. vol. 34 (1993),4781–4808
- [19] J. A. Little, *On singularities of submanifolds of high dimensional Euclidean space*, Annali Mat.Pura et Appl.(ser.4A), vol 83, (1969), 261–336

- [20] J. Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps*, London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge Univ. Press, vol 58 (1982)
- [21] J. A. Montaldi, *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J., vol 33, (1986), 81–85
- [22] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York (1983)
- [23] A. O. Petters, *Arnol’d’s singularity theory and gravitational lensing*, J. Math. Phys. vol. 34 (1993), 3555–3581
- [24] A.O.Petters, *Multiplane gravitaional lensings I, Morse theory and image countaing*, J.Math. Phys. vol. 36 (1995), 4263–4275
- [25] A.O.Petters, H.Levine and J. Wambsganss, *Singularity theory and Gravitational lensing*, Birkhäusr (2001)
- [26] P.S.Schneider, J.Ehlers and E.E. Falco, *Gravitational lenses*, Springer (1992)