

2 次方程式の解の公式

崎間@物理のかぎプロジェクト

2005-11-13

2 次方程式には「解の公式」なるものが存在します。中学・高校では頻繁に使うのですが、個人的に最近あまり使わなくなっていました。公式の存在すら忘れてしまい「ん、これはどうやって解くんだ?」, 「解の公式? は?」なんてことにならないためにも、そして「公式」に頼りきらないためにも、2 次方程式の解の公式を導出を試みましょー。さらに学びたい人には、[平方完成の図形的イメージ](#) という姉妹記事も用意しています。

解の公式

まずは公式そのものの確認です。2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

で与えられるという公式、これが「2 次方程式の解の公式」です。ほとんどの人が、中学生のとき数学の授業で暗記させられたと思います。みなさんは、まだ覚えていますか? (僕はついこないだまで忘れてました。)

導出

それでは、解の公式を導いてみます。単純に、2 次方程式を平方完成して解けば良いです。つぎの 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

を、実際に平方完成して解いて行きましょー (平方完成の手順を忘れてしまった人は、その復習にもなりますよ)。最初に、一番次数の大きい x^2 の係数で x の項を括ります。いまの場合は a で括ることになります。

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = 0 \quad (2)$$

そして、括ったカッコを 2 乗（平方）の形にします．ここが平方完成です．

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c = 0 \quad (3)$$

このとき、マイナスの項が出てくる理由はいいですね（よく分からなければ、実際に式 (3) を計算して、式 (2) に戻ることを確かめてみてください）．

式 (3) の左辺第 1 項だけを左辺に残し、それ以外は右辺に移項します．

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - c$$

上式の両辺を a で割って（ $a \neq 0$ とします）、右辺を通分すると

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2}{2^2 a^2} - \frac{c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

となります．ここまでくれば、後は

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (4)$$

を変形して $x =$ の形にしてやれば解の公式のできあがりです．とりあえず、左辺の 2 乗を外したいですね．

たとえば「 $x^2 = u$ 」という式があって、 x^2 の二乗を外したい場合は、右辺をルートにすれば良いのでした．しかし $x = \sqrt{u}$ では間違いです．二乗して u になる数は $+\sqrt{u}$ と $-\sqrt{u}$ の二つあることに注意してください．したがってこの例では $x = \pm\sqrt{u}$ となります．

これを踏まえて式 (4) を変形しますと

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

となります．そして左辺第 2 項を移項して

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

通分すると

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

のできあがりです．これで、解の公式 (1) の導出が完了しました．導出の流れさえ理解しておけば、解の公式を忘れてしまっても、 $ax^2 + bx + c = 0$ からスタートしていつでも導くことができます．解の公式を導く方法は上の通りでしたが、「平方完成」とはどういう意味があったのでしょうか．知りたい方は [平方完成の図形的イメージ](#) に進んでみてください．