

部分群

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

部分群という言葉は，ここまでも何度出てきました．直観的にも理解しやすい概念だとは思いますが，あまり正確に定義してはいませんでした．今後の議論に備えて，もう少し議論を掘り下げます．

ここまでは群の例を考えてきましたが，この辺りから群の性質に関する話が増えてきます．内容が抽象的すぎて分からないと感じたら，いつでも簡単な具体例に戻り，その話題を十分に消化するまで悩むことが大切です．先を急いではいけません．

部分群

ここまで，部分群という言葉あまり正確に定義せずに使ってきましたが，今後，群を部分群に分けることが話題になりますので，まずは，もう少し丁寧に部分群の定義を与えるところから始めます．

群 G の部分集合 H が次の二つの条件を満たすとき， H を G の部分群と呼びます．

$$1. a, b \in H \implies ab \in H \quad (1)$$

$$2. a \in H \implies a^{-1} \in H \quad (2)$$

まず，ここで行われている演算は， G の演算と同じですから，結合則がなりたつことは前提になっています．最初の条件は，演算が閉じていること，すなわち群の公理の一番目の条件です．二番目の条件は，逆演算が存在するという主張です．

あとは，単位元の存在が示せば H も群だと言えるのですが，(1) で $b = a^{-1}$ と置けば， $aa^{-1} = e \in H$ となって，(1) と (2) から自動的に単位元の存在は保証されます．すなわち，1. と 2. を満たすことが，部分群となるための条件です．

群 G の部分群のうち，最大のものは G 自身です．また，最小のものは単位元 e だけからなる群 $\{e\}$ です．この二つは 自明な部分群 と呼びます．どんな群にも，この二つの部分群だけは必ず存在するからで

す．これら以外の部分群を 真部分群 と呼びます．真部分群があるかないかは，群によります．

巡回部分群

群 G (どんな群でも構わない) の任意の元 a に対し， a を生成元とする巡回群 H が存在するならば， H は G の部分群となります．これを 巡回部分群 と呼びます．

巡回部分群 H が，部分群の定義 (1) と (2) を満たすことを確認してみましょう．まず， H には a の全ての冪乗が含まれているはずですので，次式がなりたちます．

$$a^i, a^j \in H \implies a^{i+j}$$

また， a^i に対して a^{-i} も必ず H に含まれてますから，逆元が存在し， $a^i a^{-i} = e$ より単位元も H に含まれます．

部分群のもう一つの定義

上で与えた部分群の定義は直感的に意味も分かりやすく，十分にシンプルなものですが，さらに二つの条件を一つにまとめてしまうことができます．

条件 (1) と (2) より，次式が言えます．

$$a, b \in H \implies a^{-1}, b \in H \implies a^{-1}b \in H \quad (3)$$

条件 (3) は条件 (1) と (2) から導かれた必要条件です．しかし逆に $a, b \in H \implies a^{-1}b \in H$ が成り立つとすると， $b = e$ と置くことで， $a, e \in H \implies a^{-1}e = a^{-1} \in H$ となり，条件 2. を導けます．

条件 (2) が示せると，ここから $a, b \in H \implies a^{-1}, b \in H \implies (a^{-1})^{-1}b \in H \implies ab \in H$ として，条件 (1) も導けます．(単位元は， $b = a$ とすれば， $a, a \in H \implies a^{-1}a = e \in H$ となり， H に含まれることが示せます．)

従って，条件 (3) は条件 (1)(2) の必要十分条件になっており，(1)(2) の代わりに (3) を部分群の定義にしても良いということになります．

まとめ

ここまでの議論をまとめます．次の 1. ~ 4. は，部分群の定義としてどれも同値だということになります．

1. H は G の部分群である．
2. $a, b \in H \implies ab \in H$; $e \in H$; $c \in H \implies c^{-1} \in H$

*1 パッと見たところ，式 (3) は片一方にだけ -1 が付いていたりして，これだけから群の公理を示せるというのが分かりにくい式形です．しかし，馴れるしかありません．

$$3. a, b \in H \implies ab \in H, a^{-1} \in H$$

$$4. a, b \in H \implies a^{-1}b \in H$$

4 番目の定義が、ぱっと見ただけでは分かりにくいかも知れませんが、一番簡潔な表現になっているため、今後よく出てくることと思います。これを機会に慣れておきましょう。

練習問題

四番目の定義を使って、次のことを確認してみましょう。

1. 正の実数全体 R^+ は、実数の乗法群 $R - \{0\}$ の部分群になります。
2. 正則な $n \times n$ 行列全体の作る群の中で、 $n \times n$ の直交行列全体の作る集合は部分群になります (直交行列とは転置行列 A^t が逆行列 A^{-1} になるような行列で、 $A^t A = A A^t = E$ を満たすものです。)

記号

群 H が群 G の部分群であることを、記号で $H \subset G$ のように書きます。記号 $\subset, \supset$ は集合同士の包含関係を示すときに使い、 $\in, \ni$ は元の帰属関係を示すのに使います。例えば、 $\alpha, \beta \in K$ と書けば、 α と β が集合 K の元だという意味です。混乱しないように、記号に慣れていきましょう。

一つの定理

部分群になりたつ定理を一つだけ紹介しておきます。

theorem

任意の部分群 H には $H^2 = H$ がなりたちます。

proof

証明は簡単です。 $e \in H$ より、 H の元 $h \in H$ に対して $eh \in HH \implies h \in H^2$ がなりたちます。これより $H \subset H^2$ が導かれます。一方、 H は群なので演算について閉じているので $hh \in H$ のはずで、これより $H^2 \subset H$ が導かれます。二つの式より $H = H^2$ が要請されます。

■

*2 加法群では $x^{-1} = -x$ と書かれますので、4 番目の定義は $a, b \in H \implies -a + b \in H$ となります。こんな形にも慣れておくと良いです。

*3 二つの集合 A, B が等しいことを示すのに、ここでやったように $A \subset B$ と $B \subset A$ を両方示し、ゆえに $A = B$ と結論づけるのはよくやる証明のテクニックです。