剰余類

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

整数全体の集合 Z が，整数の合同関係 (ある整数で割られたときの余りが等しい) によって，類別できることを見ました．集合を類別するには，集合の元の間に同値関係と呼ばれる関係が成り立っていなければならなかったのですが，同値関係は『反射律，対称律，推移律を満たす関係』(詳しくは 整数の加法群の剰余類 を参照) と定義される関係であれば何でも良かったので，整数の合同関係だけが唯一の可能性ではありません．

むしろ，具体的な同値関係から離れて，一般的に群の類別とは何かを学ぶことが大事です．実際に手を動かして類別してみると，綺麗に群を分けられることに感動すると思います．ぜひ，何か練習問題を解いてみて下さい．

左剰余類と右剰余類

群 G と，その部分群 H があるとします．a を G の元とします．このとき，H に属する全ての元に，a を左から作用させたものを **左剰余類**，右から作用させたものを **右剰余類** と呼びます．これを，aH，Ha のように書きます (この表記法については 集合の元同士を足す・掛ける を参照して下さい)．

$$aH = \{ah|h \in H\}$$

$$Ha = \{ha|h \in H\}$$

さて，G は群でしたので演算に関して閉じているはずで，ha も ah も全て G の元のはずです．すなわち，aH も Ha も G の部分集合 (←単なる集合．部分群ではありません！) になっています．同じ類に属する元は全て **同値関係** にあると呼ばれます．

ここで，剰余類によって本当に群が類別されることを示しておきましょう．

---

*1 わざわざ左と右を区別するのは，一般に a と h の積が非可換だからです．もしも G が可換群なら，このような区別は必要ありませんので，単に剰余類と呼ぶことができます．

*2 単位元の剰余類は，左剰余類であっても右剰余類であっても，H 自身になります．$eH = He = H$ ですので，H 自身も剰余類です．

*3 H には単位元が含まれるので，a 自身は必ず剰余類 aH に含まれます．

Proof

二つの剰余類は共通集合を持たないはずですので $aH \cap bH = \phi$ となるはずです．仮に同値ではない二つの元 a, b の左剰余類について，$aH \cap bH \neq \phi$ だとすると，aH と bH には共通元 c が少なくとも一つ存在し，$c = ah_1 = bh_2 \ (h_1, h_2 \in H)$ のように表わせるはずです．両辺から h_2^{-1} を掛けて $b = ah_1{h_2}^{-1}$ となりますが，$h_1 h_2^{-1} \in H$ より，結局これは b が $b = ah \ (h \in H)$ の形に表わせることを意味しています．これは，b が a の剰余類に含まれることを意味し，a と b が同値ではないとした前提に反します．よって，$aH \cap bH = \phi$ が言え，確かに剰余類は群を類別します．右剰余類に関しても，同様に証明できます．

類別の一意性

同じ剰余類に属する元は，同値であると言われるのでした．もし，元 b が a の剰余類 aH に属するとすれば，ある H の元 h_b が存在し，$b = ah_b$ なる関係がなりたつはずです．これを数式で書けば，次のようになります (これは左剰余類の例です．以後，簡単のために全て左剰余類で剰余類を代表させて議論を進めます．)

$$a \sim b \iff \exists h \ s.t. \ \ b = ah \ (h \in H)$$

群 G の元のうち，同値ではない $a_1, a_2, ..., a_m$ のそれぞれの剰余類を $a_1H, a_2H, ..., a_mH$ と置くと，G は次のように類別されます.

$$G = H + a_1H + a_2H + ... + a_mH \tag{1}$$

大事なポイントは，群 G とその部分群 H をまず想定し，H を使って元 a の剰余類を作ったという点です．言い方を変えれば，群 G にまず部分群 H を与えると，G の元の中で H に含まれない残りのものは，H と，G の元を使って表現し尽せるということでもあります．当然のことながら，部分群 H の選び方によって aH は異なってきます．この意味で，この類別を **部分群による類別** と呼ぶこともあります．

もう一つ確認しておくことは，類が一般には群にならないという点です．類別とは，集合の元を分類す

[*4] 二つの元が同じ剰余類に属するという関係が，同値関係の定義であった三つの条件，すなわち反射律・対称律・推移律を満たすのを確認してみましょう．

ることなのであって，元の代数構造は一般に継承されません．

代表，部分群の指数

さて，類別に関して出てくる用語をもう少し定義しておきます．部分群 H は群ですので単位元 e を含みます．よって,，a は自身の作る剰余類 aH に含まれます ($a = ae \in aH(e \in H)$)．a を，剰余類 aH (もしくは Ha) の **代表** と呼びます．

また，群 G が有限個の H 剰余類の和集合として表わされる場合，この剰余類の個数を **H の G における指数** と呼びます．

$$G = a_1H + a_2H + ... + a_rH$$

例えば，上式のように書ける場合，H の G における指数は r です．当然，$a_1, ..., a_r$ のどれか一つは e です．H の G における指数を次のように書きます．

$$|G : H| = r$$

同じ群 G に対しても，H によって類別の仕方は違いますから，指数は H によることをよく理解しておいて下さい．G が無限群で，H によって無限個の剰余類に類別できるときは，$|G : H| = \infty$ のように書きます．

例

整数全体 Z は加群を作ります．部分集合 $H = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...\}$ は部分群になっています (単位元と逆元の存在を確かめてください)．この部分集合を使って，Z は次のように 5 つに類別できます (これは 整数の加法群の剰余類 の最後で使った例です)．

$$Z = H + (1 + H) + (2 + H) + (3 + H) + (4 + H)$$

ここで，$(2 + H)$ などと書いたのは，集合 H の全ての集合に 2 を足すという意味です．各類は，整数を 5 で割ったときの剰余類になっています．

例題

類別を理解するのは, 実際に手を動かしてみるのが一番です．$S_3 = \{e, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ を類別してみましょう．できたら，この続きを読む前に自分で適当な部分群を使って類別を行ってみてください．

[*5] 剰余類を定義するにあたって，元 a を左から作用させるとか，右から作用させるかにはこだわって来ましたが，一体全体，これがどのような演算なのかは，明示してきませんでした．一般に，どのような演算でも良いのです．繰り返しになりますが，この『なんでもよい』というのが，抽象数学の強みであり，セールスポイントな訳です．ところが，剰余群という名前は『整数で割り算をしたときの余り』を強く連想させますから，あまり良い命名とは言えません．これはそもそも，整数全体が加法に関して生成する群を，ある整数で割ったときの剰余で群を類別したことから剰余類という言葉が生まれてきたという歴史的経緯による名前です．本当は，同値な元を集めて群を類別したのですから，同値類という言葉を使った方が意味が明快です．

部分群として $H_1 = \{e, (1\ 2)\}$ を考えましょう．すると，S_3 は次のように類別できます (左作用を考えます).

$$S_3 = H_1 + (1\ 3)H_1 + (2\ 3)H_1$$

この類別によって過不足なく S_3 の元が表現されていることを確認してください．また $H_2 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ も部分群を作りますので，これを使った次のような類別も可能です.

$$S_3 = H_2 + (1\ 2)H_2$$

また，自明な例ではありますが，$H_3 = \{e\}$ も部分群を作ります.

$$S_3 = H_3 + (1\ 2)H_3 + (1\ 3)H_3 + (2\ 3)H_3 + (1\ 2\ 3)H_3 + (1\ 3\ 2)H_3$$

問題

（1） $|G : \{e\}| = |G|$ を確認してください．（2） $|G : G| = 1$ を確認してください．（3） n 次の対称群と交代群について，$|S_n : A_n| = 2$ を確認してください.