

正多面体群 3

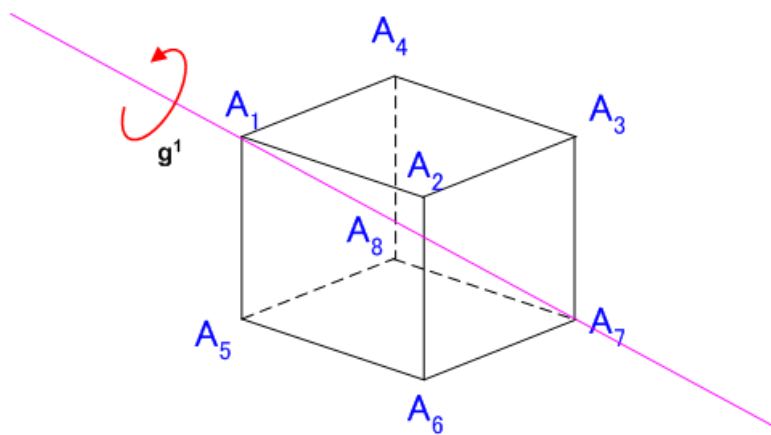
Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

類別とラグランジェの定理の応用を，正多面体群を使って考えてみます．最初は，正六面体群を考えます．

正六面体群

正六面体群 $P(6)$ について見てみましょう．正六面体の各頂点に A_1 から A_8 までの名前をつけることにします．正六面体群の元 p の中には，全ての頂点を置換する変換と，特定の頂点を不動に保つ変換とがあります．



特定の頂点を不動に保つ変換とは，その頂点を通る対角線の回りに正六面体を回転させる変換です．例えば，いま仮に A_1 を不動に保つ変換 $g^{(1)}$ を考えると， $g^{(1)}$ は常に $g^{(1)}(A_1) = A_1$ を満たすということです．変換 $g^{(1)}$ は一つではありませんが， $g^{(1)}$ の集合は $P(6)$ の部分群になることが示せます．

さて， H に属する変換には，恒等置換か，120 回すか，240 度回すか，の 3 種類しかありませんでしたので， $|H| = 3$ が言えます．この H を使って， $P(6)$ を類別しましょう． a_i を，頂点 A_1 を頂点 A_i へ移

*1 頂点 A_1 を不動に保つ変換の集合 H に属する二つの元 $g^{(1)}_1, g^{(1)}_2$ を考えるとき，これを連続的に作用させても頂点 A_1 はやはり動きません．すなわち， $g^{(1)}_1 g^{(1)}_2 \in H$ が言えて， $g^{(1)}$ 同士の積は閉じています．また $g^{(1)}_1$ の逆元は逆回転させることですが，これが H の元であることは明らかでしょう．よって H は群となり， $P(6)$ の部分群だと言えます．

す変換だとすると， $P(6)$ は次のように類別できます．

$$P(6) = H + a_2H + a_3H + a_4H + a_5H + a_6H + a_7H + a_8H$$

従って， $|P(6)| = |H| \times |P(6) : H| = 3 \times 8 = 24$ が分かります．

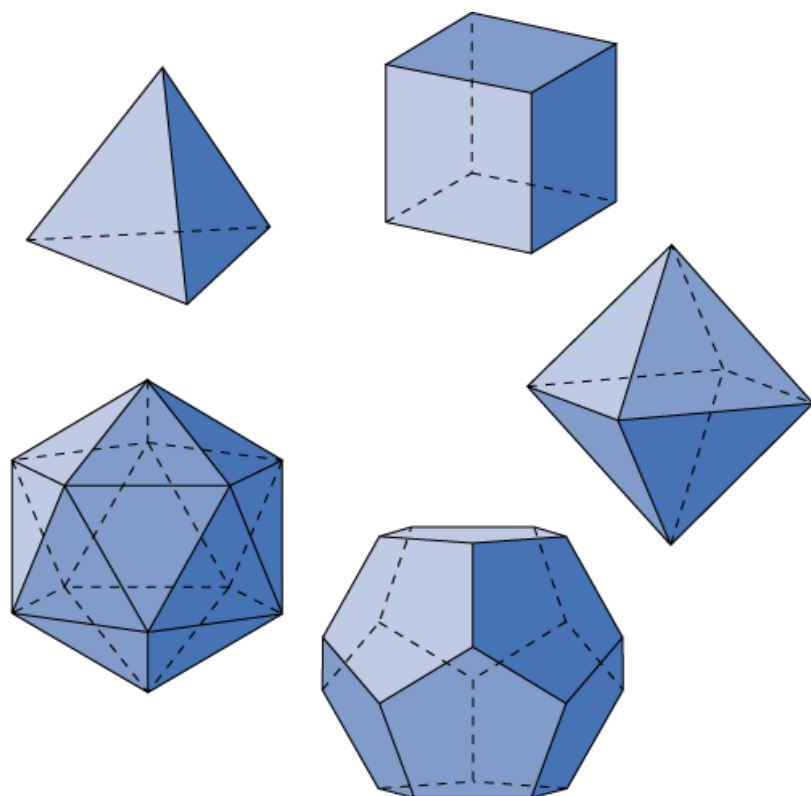
その他の正多面体群

他の正多面体群も，同様の手法で位数を求められることを見ましょう．

表 1: 正多面体の頂点，辺，面

	頂点の数	その頂点を不動に保つ変換の数	群の位数
正四面体	4	3	12
正六面体	8	3	24
正八面体	6	4	24
正十二面体	20	3	60
正二十面体	12	5	60

ある頂点に対し，その頂点を不動に保つ変換の数 ($|H|$) は，その頂点に集まる辺の数と同じです．正六面体に対しては，対称群と対応させることですぐに解く方法が簡単でしたが ([正六面体群](#) を参照) ，正二十面体のように複雑なものには，視覚的に対称群を対応させるのは困難でした．ここで紹介した，剰余類分解を使う方法ならば，正二十面体でも一つの頂点だけに着目すれば良いので，視覚的にも簡単に計算できます．表中の頂点の数が $|P(i) : H|$ にあたります．



いろいろな見方があるもんですね！