

クラインの四元群

Joh @物理のかぎプロジェクト

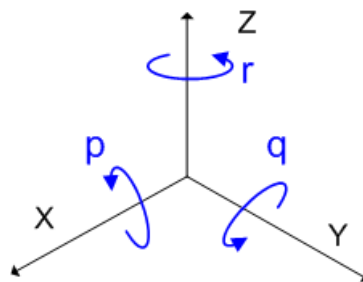
2006-04-23

教科書によく出てくるものに、クラインの四元群というものがあります。クラインの四元群とは、位数 4 の可換群です。位数 4 の可換群なので、 4×4 の群表 (対角線に対して対称になるはず) を書けば、元同士の演算関係を網羅できるはずです。

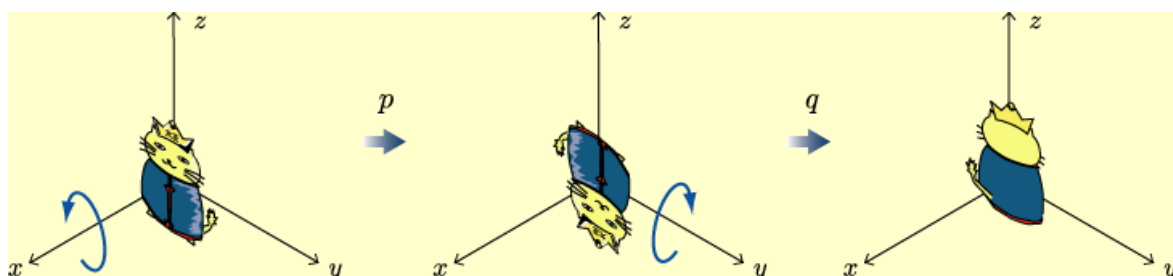
群の構造としては、群表を書いた時点で説明を尽くしているのですが、具体的にはクラインの四元群は x, y, z 各軸回りに 180 度回転させる回転操作の群として表現されます。

クラインの四元群

次図のように、 x 軸、 y 軸、 z 軸に沿って図形を 180 度回すような回転を、それぞれ p, q, r と名づけます。(有限回転の操作は、一般に非可換です。[無限小回転 1](#) を参照してください。しかし、回転角が 180 度の場合は可換になります。つまり、これは有限回転の操作の中では、かなり例外的なものです。)



例えば、 p の操作の後に続けて q の操作を行うことは、 r の操作に等しくなります。



想像だけで考えていると混乱してくるので、どうか何か手に取って、実際に回して確認してみてください。同様に、 q に続けて r を行う変換は、 p に等しくなります。また、同じ変換を二回続けて行くと、何もしなかったの (恒等変換 e) と同じになります。

これらの回転操作 e, p, q, r は群をなします。群表にまとめると、次のようになります。

表 1: クラインの四元群の群表

	e	p	q	r
e	e	p	q	r
p	p	e	r	q
q	q	r	e	p
r	r	q	p	e

同じ構造の群

上の表中、 $\{e, p, q, r\}$ として、回転操作の代わりに、次のような四つの行列の積を考えても、上と同じ群表を満たします。計算して確かめてみましょう。ただし j は二乗して $j^2 = 1$ となる、[分離複素数](#) と呼ばれるちょっと変わった数です。複素数ではありません。

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$$

つまり、これらの行列の集合は、群として同じ構造をしているということです。他にもクラインの四元群と同じ構造の集合 (元が 4 つあり、同じ群表を満たすもの) を探してみましょう。

練習問題 1

クラインの四元群は 4 次の対称群 S_4 の元のうち、次の四つを元とする部分群だと言うこともできます。群表を書いて確認してみましょう。(上の群表で e, p, q, r に当たるのは、それぞれどれでしょう?)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*1 クラインの四元群の元 p, q, r はどれも二乗すると e になりますから位数は 2 だと言えます。クラインの四元群は、巡回群ではない群としては最小のものです。クラインの四元群が存在すること、四次方程式に解の公式が存在することは、ガロア理論によって結び付けられます。

*2 クライン (Felix Klein (1849-1925)) は、群論の幾何学における重要性を大いに研究した数学者です。クラインがエルランゲン大学で行った講義をまとめた『エルランゲン目録』は特に有名で、「一つの幾何学は、一つの変換群によって不変な性質を研究する不変式論である」との主張を行いました。なんのこっちゃ、と思うかも知れませんが、これはショッキングな宣言です。噛み砕いて言えば、あるタイプの幾何学には、一つの変換群が一対一に対応するという主張なのです。具体的には、ユークリッド幾何学には運動群が、アフィン幾何学にはアフィン群が、射影幾何学には射影変換群が対応するという具合です。このようにして、色々な分野に分かれていた幾何学が、群論によって統一的に扱われる可能性が拓かれ、逆に、群論の研究から、新しいタイプの幾何学が生まれてくる可能性も示されました。いまや幾何学の勉強に群論は欠かせません。

練習問題 2

二つの文字からなる集合 $S = \{A, B\}$ と $T = \{1, 2\}$ を考えます．これらを組み合わせできる文字は全部で $\{A1, A2, B1, B2\}$ の4つです．これに二つの関数 σ, τ を考えます． σ は文字に作用すると A と B を入れ換えてしまう関数です．すなわち $\sigma(A1) = B1, \sigma(B2) = A2$ のようになります．一方, τ は数字を入れ換えてしまう関数で $\tau(A1) = A2, \tau(B2) = B1$ のように働きます．

1. σ と τ の結合は可換であることを確認してください．
2. $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ と恒等置換 e の四つは群をなし, クラインの四元群と同型であることを確認してください．