

同型定理

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

準同型定理を使うと、いままで少し曖昧に使ってきた群の同型という概念を正確に定義することが出来ます。また、同型に関する有名な定理を幾つか導けます。図式的なイメージでいいので、同型という言葉の意味を納得していると良いのですが、なんだかイメージが曖昧な人は、先へ進む前にもう一度 [準同型写像](#) を復習して下さい。

同型定理の背景にあるのは準同型定理です。まずは準同型定理が基本です。

同型の定義

ここまでに何度も同型という言葉は出てきましたが、きちんと定義しないまま使ってきました。準同型定理を使って、群の同型をより厳密に定義することができます。

theorem

二つの準同型写像 f, g が存在し、 $f: G \rightarrow G'$, $g: G' \rightarrow G$ を満たし、かつ写像の合成が恒等写像 ($g \circ f = f \circ g = 1$) となるとき、 G と G' を同型という。

群の同型に関して、さらに 第一同型定理、第二同型定理、第三同型定理 と言われる有名な三つの定理が導けます。同型の概念は、群論以外の分野にも出てきますので、混乱のないように、これを「群の第一同型定理」と呼ぶこともあります。

第一同型定理

theorem

群 G が準同型写像 f によって G' に対応づけられるとします。 G' の正規部分群 H' に対し、 $H = f^{-1}(H')$ と定義すると、 $G/H \sim G'/H'$ がなりたちます。

*1 この記事が、定理と証明、といういかにも代数の教科書のような構成になってしまったのが、少し残念です。でも、どの定理も証明も大事なのです (><)。

proof

写像 $f: G \mapsto G'$ に加え、写像 $g: G' \mapsto G'/H'$ を考えます (ポイントは $G' \mapsto G'/H'$ の準同型写像を考える所なのですが、 G' の任意の元 a' に対して $a'H'$ を対応させることを考えると、これは明らかに準同型写像です)。よって f と g の合成写像 $g \circ f$ は、 G から G'/H' への準同型写像になるわけです。この合成写像 $g \circ f$ に準同型写像を適用します。 $g \circ f$ の核は、 $g \circ f$ によって G'/H' の単位元に移る G の元です。この核を H と名づけると $G/H \sim G'/H'$ が言えます。■

第二同型定理**theorem**

群 G が正規部分群 N を持つとします。 N は、 G の任意の部分群 H に対し、 $HN = NH$ を満たします。このとき、 $H \cap N$ は H の正規部分群で、 N は HN の正規部分群だと言えます。この $H, N, H \cap N, HN$ の間に、 $H/H \cap N \sim HN/N$ がなりたちます。

proof

群 G が正規部分群 N と、部分群 H を持ちます ($N \triangleleft G, H \subset G$)。このとき、 HN は G の部分群となり、 N は HN 正規部分群になります ($HN \subset G, N \triangleleft HN$)。いま、二つの準同型写像 $f: H \mapsto HN, g: HN \mapsto HN/N$ を定義すると、この写像の合成写像は、 $g \circ f: H \mapsto HN/N$ となります。さて、任意の HN/N の元は $aN \in HN/N$ の形をしていますが、ここで $a \in HN$ なので、 a を $a = hx$ ($h \in H, x \in N$) のように表現できます。これを使うと $aN = hxN = hN$ (N は群なので $xN = N$) と変形でき、先ほどの合成写像を使って $(g \circ f)(h) = hN = aN$ と書き換えられます。この写像を群に広げれば $(g \circ f)(H) = HN/N$ を得ます。また、群 HN/N の単位元は N ですが、 $(g \circ f)(z) = N$ とすると、 g の定義より $f(z) \in N$ であるはずで、 f の定義より $z \in H \cap N$ が要請されます。よって、 $(g \circ f)$ の核は $H \cap N$ だということが分かりました。 $(g \circ f)$ に準同型写像を当てはめて $H/H \cap N \sim HN/N$ を得ます。■

第三同型定理**theorem**

群 G に二つの正規部分群 H, M があり、 $M \subset H \subset G$ の包含関係にあるとします。このとき $(G/M)/(H/M) \sim G/H$ がなりたちます。

*2 部分群 H の定義の仕方に注意してください。まず G' の部分群 H' を考え、準同型写像の逆写像によって H を決めるのがポイントです。

proof

いま $G' = G/M$ とおき, 準同型写像 f を $f : G \mapsto G' = G/M$ と置きます. さて, $H' = H/M$ は G' の正規部分群になりますが, これに対し $f^{-1}(H/M) = H$ がなりたちます. 従って第一同型定理から, $G/H \sim G'/H' \sim (G/M)/(H/M)$ が示せます. ■