

# 完全代表系と商集合

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

この後の議論にすぐに使う概念ではありませんが、商集合と完全代表系は剰余類と一緒に覚えておくとう分かりやすいので、ここでその定義を手短かに紹介します。先を急ぐ読者の方は、読み飛ばしても構いません。

## 完全代表系

群  $G$  の元  $a$  と、 $G$  の部分集合  $H$  に対し、左剰余類  $aH$  という集合は次のように定義されるのでした。

$$aH = \{ay | y \in H\}$$

そして、異なる左剰余類  $a_i H$  によって、群  $G$  は類別できるということでした。

$$\begin{aligned} G &= H + a_1 H + a_2 H + \dots \\ &= \bigcup_i a_i H \end{aligned}$$

( $\bigcup_i$  は見慣れない記号かも知れませんが、集合の和集合を取るという意味です。集合に対する  $\sum_i$  だと思ってください。)

この類別に対し、各剰余類から一つずつ代表的な元を取ってきて作った集合を、 $G$  の  $H$  に対する左代表系と呼びます。例えば  $\{e, a_1, a_2, \dots\}$  は一つの左代表系です。

右剰余類に対しても、同様に右代表系を定義できます。

## 商集合

さらに、左剰余類全体の作る集合  $\{H, a_1H, a_2H, \dots\}$  を、 $G$  の  $H$  に対する左商集合 と呼び、 $G/H$  のように書きます。個々の元が、それぞれ一つの集合になっているのがポイントです (つまり集合の集合です)。

$$G/H = \{H, a_1H, a_2H, \dots\}$$

- 
- \*<sup>1</sup> 群  $G$  の元は全て、どれか一つの剰余類 (仮に  $a_kH$  とします) に属しているはずですが、これを  $x \in a_kH$  のように表わすと、逆元を取れば  $a_k^{-1}x \in H$  のように書き直せます。すなわち、 $G$  の任意の元  $x$  に対し、完全代表系の元をどれか一つ  $a_k^{-1}x$  のように作用させることで、その積を部分群  $H$  の元とすることが出来るという主張でもあります。
- \*<sup>2</sup> 群  $G$  における  $H$  の指数  $|G:H|$  とは、 $H$  から作れる剰余類の個数のことでした。これを、 $H$  の完全代表系の元の個数と言っても、同じことです。
- \*<sup>3</sup> 整数全体からなる加群が、整数の剰余で類別できることを **整数の加群の剰余類** で見ましたが、商集合という名前は、この剰余のイメージから来たのでしょうか。  $G$  が整数の加群と全く異なる群ならば、商集合が商という言葉から連想される「割り算」とは縁遠いものになることもあります。あまり字面にこだわらない方が良いと思います。
- \*<sup>4</sup> 商集合の元の個数は、明らかに完全代表系の元の個数と同じです。これはすなわち、群  $G$  における  $H$  の指数  $|G:H|$  とも等しくなります。
- \*<sup>5</sup> 一般には商集合は群になりませんが、 $H$  が **正規部分群** の場合には群になり、商群と呼ばれます。正規部分群はまだ勉強していませんが、正規部分集合を勉強したあとに、この脚注を思い出してまた復習して貰えるといいと思います。