

代数方程式の判別式

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-03-28

代数方程式が与えられたとき、異なる実数解を持つのか、重解を持つのか、それとも異なる虚数解を持つのかを判別する式を代数方程式の判別式と呼びます。実際に方程式を解く前に判別式を考え、解に関する情報を得るのは大事なことです。

判別式の定義

次のような n 次の代数方程式を考えましょう。

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

この方程式が n 個の解 (重解を含んでも良い) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を持つとき、次のように、解の差を全ての組み合わせに関して掛け合わせたものを P と置きます。

$$\begin{aligned} P = & (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n) \\ & \times (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4) \cdots (\alpha_2 - \alpha_n) \\ & : \\ & \times (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \end{aligned}$$

もしも式 (1) が重解を持つとすれば、 P に含まれる括弧のうち、どれかが零になり、 P は零になるはずで。逆に、 P が零でないのは、式 (1) の持つ全ての解が異なる場合だけと言えます。

次に式 (1) が重解を持たない場合に P の二乗を考えてみましょう。実数を二乗すれば常に正になるはずですから、解が全て実数ならば P の二乗は正になります。もし、 P の二乗が負になれば、共役な虚数解が奇数組含まれているということになります。

この P の二乗を用いて、次のように判別式 D を定めます。係数 $a_0^{2(n-1)}$ は、判別式が分数にならないよう、簡単化するために付けただけのもので、本質的な意味はありません。

$$D = a_0^{2(n-1)} P^2$$

*1 偶数組の共役虚数解 (すなわち 4 の倍数個の虚数解) が含まれている場合には P の二乗は正になります。すなわち、解が実数であることは $D > 0$ の十分条件であって、必要条件ではありません。一般に、判別式の符号だけから実数解か虚数解かを判別できるわけではないのです。二次方程式に限った話ならば、 $D > 0$ ならば方程式は実数解を、 $D < 0$ ならば虚数解を持つと判断できます。

二次方程式の判別式

では、例として次の二次方程式の判別式を考えてみましょう。

$$ax^2 + bx + c = 0$$

これが解 α_1, α_2 を持つとすると、判別式は定義より次式です。

$$D = a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = a^2\{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\}$$

これは、解と係数の関係を使って次のように書き直すことができます。

$$\begin{aligned} D &= a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \\ &= a^2\{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\} \\ &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

$$\left(\because \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}\right)$$

二次方程式の判別式
 $D = b^2 - 4ac$
 (1) $D > 0$ 異なる実数解を持つ
 (2) $D = 0$ 重解を持つ
 (3) $D < 0$ 共役な虚数解を持つ

三次方程式の判別式

次に、三次方程式の判別式を考えます。

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

これが解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を持つとすると、判別式は定義より次式です。

$$D = a^4(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2$$

解と係数の関係を使って変形すれば、次式に至ります。途中の計算はやや面倒なので、ここでは省略します。時間とやる気のある人は、練習として確認してみてください。

$$D = -4ac^3 - 27a^2d^2 - 4b^3d + b^2c^2 + 18abcd$$

三次方程式の判別式
 $D = -4ac^3 - 27a^2d^2 - 4b^3d + b^2c^2 + 18abcd$
 (1) $D > 0$ 異なる三つの実数解を持つ
 (2) $D = 0$ 重解を持つ
 (3) $D < 0$ 一つの実数解と共役な虚数解を持つ